

Analyse I – Série 10

Echauffement. (Dérivée de la valeur absolue)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x| + e^x$. Calculer f' et tracer les graphes de f et f' .

Sol.: On a vu en cours que la dérivée de la valeur absolue $g(x) = |x|$ est

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

et que g n'est pas dérivable en $x = 0$. Ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + e^x, & x > 0 \\ -1 + e^x, & x < 0 \end{cases}$$

Notez que $f'(0)$ n'existe pas non plus.

Comme rappel, la Fig. 1 montre les graphes des fonctions e^x et $|x|$. Les graphes de f et f' sont donnés aux Fig. 2 et 3 respectivement.

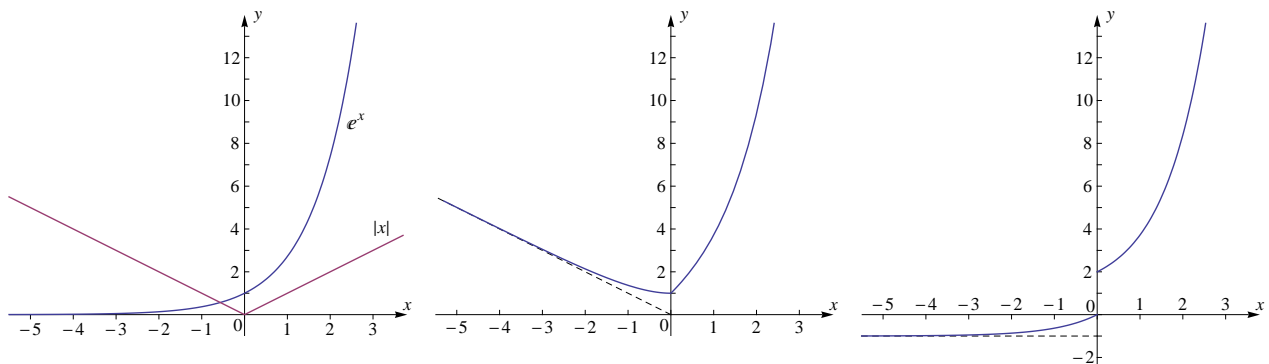


FIGURE 1 – Graphes de e^x et $|x|$. FIGURE 2 – Graphe de $f(x)$. FIGURE 3 – Graphe de $f'(x)$.

Remarque : Les lignes hachurées dans les Fig. 2 et 3 sont les asymptotes à gauche de f et f' qui sont dues au fait que la fonction exponentielle admet une asymptote à gauche en $y = 0$.

Exercice 1. (Continuité de la dérivée)

Calculer la dérivée de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$. Est-ce que la fonction f' est continue en $x = 0$?

Sol.: Rappelons les deux limites suivantes (voir le cours et les exercices pour les démonstrations) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0 .$$

Pour la dérivée de f en $x = 0$ on a par définition

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 1 \cdot 0 = 0 , \end{aligned}$$

où on a utilisé le rappel ci-dessus. Autre manière de calculer la limite : Observer que

$$-|\sin(x)| \leq -\left| \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left| \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |\sin(x)|$$

et comme $\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)| = 0$, on conclut par le théorème de deux gendarmes que la limite est 0.

Pour $x \neq 0$ on a que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \\ &= \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) . \end{aligned}$$

On a déjà vu ci-dessus que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$. Pour le deuxième terme de f' on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 1 \cdot 0 = 0 ,$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}}_{=1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Cette dernière limite n'existe pas, ce qui implique que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

Puisque la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas, la fonction f' n'est pas continue en $x = 0$.

Exercice 2. (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective sur l'intervalle $I \subset D(f)$. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} et calculer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $f(x) = e^x$ sur \mathbb{R}

e) $f(x) = e^{-x}$ sur \mathbb{R}

f) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur \mathbb{R}

g) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ sur \mathbb{R}

h) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$ sur $I = [0, \infty[$

i) $f(x) = \operatorname{th}(x)$ sur \mathbb{R}

j) $f(x) = \operatorname{coth}(x)$ sur \mathbb{R}^*

Rappel : sh (resp. ch) est une notation pour désigner la fonction sinus (resp. cosinus) hyperbolique. La fonction cotangente hyperbolique coth est définie par $\text{coth} := 1/\text{th} = \text{ch}/\text{sh}$.

Sol.: Toutes les fonctions f considérées sont des fonctions dérivables sur leur domaine. Par un théorème du cours, la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur l'image de tout intervalle sur lequel f' ne s'annule pas.

Les définitions des fonctions réciproques f^{-1} et leurs domaines respectifs ont été vus dans l'Ex. III.9 de la Série 1 pour i) – vi) et dans l'Ex. 6 de la Série 7 pour vii) – x).

1. $f^{-1}(x) = \text{Arcsin}(x)$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\text{Arcsin}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad D((f^{-1})') =]-1, 1[.$$

2. $f^{-1}(x) = \text{Arccos}(x)$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\text{Arccos}(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$D((f^{-1})') =]-1, 1[.$$

3. $f^{-1}(x) = \text{Arctg}(x)$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos(\text{Arctg}(x))^2}} = \cos(\text{Arctg}(x))^2 \stackrel{*}{=} \frac{1}{1 + \text{tg}(\text{Arctg}(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

où il faut utiliser la trigonométrie pour obtenir l'expression en $\text{tg}(x)$ à l'étape * :

$$\begin{aligned} \cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2 = 1 - \text{tg}(x)^2 \cos(x)^2 &\Leftrightarrow \cos(x)^2 (1 + \text{tg}(x)^2) = 1 \\ \Leftrightarrow \cos(x)^2 = \frac{1}{1 + \text{tg}(x)^2} \end{aligned}$$

Le domaine de définition de la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R}$.

4. $f^{-1}(x) = \text{Log}(x)$, $D(f^{-1}) =]0, \infty[$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{\text{Log}(x)}} = \frac{1}{x}, \quad D((f^{-1})') =]0, \infty[.$$

5. $f^{-1}(x) = -\text{Log}(x)$, $D(f^{-1}) =]0, \infty[$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-e^{-(-\text{Log}(x))}} = -\frac{1}{x}, \quad D((f^{-1})') =]0, \infty[.$$

6. $f^{-1}(x) = -\text{Log}_2(x)$, $D(f^{-1}) =]0, \infty[$.

$$\text{On a } f'(x) = (2^{-x})' = (e^{-x \text{Log}(2)})' = -\text{Log}(2) e^{-x \text{Log}(2)} = -\text{Log}(2) 2^{-x}$$

$$\text{et donc } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\text{Log}(2) \cdot 2^{-(-\text{Log}_2(x))}} = -\frac{1}{x \text{Log}(2)}, \quad D((f^{-1})') =]0, \infty[.$$

7. $f^{-1}(x) = \text{arsinh}(x)$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\text{ch}(\text{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}(\text{arsinh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad D((f^{-1})') = \mathbb{R}.$$

8. $f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh}(x)$, $D(f^{-1}) = [1, \infty[$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(\operatorname{arcosh}(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$D((f^{-1})') =]1, \infty[.$$

9. $f^{-1}(x) = \operatorname{artanh}(x)$, $D(f^{-1}) =]-1, 1[$.

$$\text{Comme } f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)' = \frac{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2} \text{ on a}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{artanh}(x))^2}} = \operatorname{ch}(\operatorname{artanh}(x))^2 \stackrel{**}{=} \frac{1}{1 - \operatorname{th}(\operatorname{artanh}(x))^2} = \frac{1}{1 - x^2},$$

où l'étape ** et due à

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x)^2 = 1 + \operatorname{sh}(x)^2 = 1 + \operatorname{th}(x)^2 \operatorname{ch}(x)^2 &\Leftrightarrow \operatorname{ch}(x)^2 (1 - \operatorname{th}(x)^2) = 1 \\ \Leftrightarrow \operatorname{ch}(x)^2 = \frac{1}{1 - \operatorname{th}(x)^2}. \end{aligned}$$

Le domaine de définition de la dérivée est $D((f^{-1})') =]-1, 1[$.

10. $f^{-1}(x) = \operatorname{arcoth}(x)$, $D(f^{-1}) =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$.

$$\text{Ici on a } f'(x) = \left(\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}\right)' = \frac{\operatorname{sh}(x)^2 - \operatorname{ch}(x)^2}{\operatorname{sh}(x)^2} = -\frac{1}{\operatorname{sh}(x)^2} \text{ et donc}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arcoth}(x))^2}} = -\operatorname{sh}(\operatorname{arcoth}(x))^2 \stackrel{**}{=} \frac{1}{1 - \operatorname{coth}(\operatorname{arcoth}(x))^2} = \frac{1}{1 - x^2},$$

où ** vient de

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x)^2 = \operatorname{ch}(x)^2 - 1 = \operatorname{coth}(x)^2 \operatorname{sh}(x)^2 - 1 &\Leftrightarrow \operatorname{sh}(x)^2 (\operatorname{coth}(x)^2 - 1) = 1 \\ \Leftrightarrow \operatorname{sh}(x)^2 = \frac{1}{\operatorname{coth}(x)^2 - 1}. \end{aligned}$$

Le domaine de définition la dérivée est $D((f^{-1})') = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Exercice 3. (Théorème des accroissements finis)

Montrer en utilisant les corollaires du théorème des accroissements finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq 0.$$

Sol.:

a) Soit la fonction $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$. Observons d'abord qu'il suffit de montrer l'inégalité pour $x \geq 0$ puisque f est paire.

On a $f(0) = \cos(0) - 1 + 0 = 0$. Par le corollaire du théorème des accroissements finis vu en cours, l'inégalité est satisfaite si on montre que $f'(x) \geq 0$ pour $x > 0$. On a $f'(x) = -\sin(x) + x$ dont on ne connaît à priori pas le signe. Mais on a $f'(0) = 0$. De nouveau par le même

corollaire il suffit de montrer que $f''(x) \geq 0$ pour $x > 0$. Or, $f''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0$ parce que $\cos(x) \in [-1, 1]$. Donc on a successivement

$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0 &\stackrel{\text{Cor.}}{\implies} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 &\stackrel{\text{Cor.}}{\implies} f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \geq 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où l'inégalité désirée.

Exercice 4. (Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{Log}(x-1)}{x-2} \qquad \text{b) } (*) \lim_{x \rightarrow \infty} x (\text{th}(x) - 1) \qquad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{1/x}$$

Pour (b) on pourra appliquer BH plusieurs fois jusqu'à ce que la limite ne soit pas indéterminée.

Sol.:

Afin de calculer les limites demandées, on applique la règle de Bernoulli-l'Hospital (abrégée par BH) une fois qu'on a vérifié ses hypothèses.

a) Posons $f(x) = \text{Log}(x-1)$ et $g(x) = x-2$. Alors on a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Les hypothèses de BH sont donc satisfaites et on a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{Log}(x-1)}{x-2} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1} = 1.$$

b) Ici, on doit utiliser la règle BH plusieurs fois. Pour la première fois on pose $f(x) = \text{th}(x) - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, les hypothèses sont satisfaites. On peut donc appliquer BH une première fois (les hypothèses pour les étapes suivantes seront vérifiées ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x (\text{th}(x) - 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{th}(x) - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\text{ch}(x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\text{ch}(x)^2} \\ &\stackrel{\text{BH}}{=} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\text{sh}(2x)} \stackrel{\text{BH}}{=} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2 \text{ch}(2x)} = 0. \end{aligned}$$

Pour la deuxième application de BH on a $\tilde{f}(x) = x^2$ et $\tilde{g}(x) = \text{ch}(x)^2$ on a $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{g}(x) = \infty$ et $g'(x) = 2 \text{sh}(x) \text{ch}(x) = \text{sh}(2x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (ce qui est bien le cas lorsque $x \rightarrow \infty$).

Finalement pour la troisième fois avec $\bar{f}(x) = 2x$ et $\bar{g}(x) = \text{sh}(2x)$ et donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{g}(x) = \infty$ ainsi que $\bar{g}'(x) = 2 \text{ch}(2x) \neq 0$. On a donc bien pu appliquer BH les trois fois.

c) On a $(1 + \sin(x))^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \text{Log}(1 + \sin(x))\right)$. On va donc d'abord calculer la limite de l'exposant. Posons $f(x) = \text{Log}(1 + \sin(x))$ et $g(x) = x$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ et $g'(x) = 1 \neq 0$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1 + \sin(x))}{x} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}}{1} = 1,$$

et par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{1/x} = e^1 = e.$$

Exercice 5. (Application de la Règle de Bernoulli-l'Hospital)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Indication : on pourra se ramener à l'étude de fonctions, en utilisant le fait que si $a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ si cette dernière limite existe.

Sol.:

a) La fonction $f(x) = x(e^{1/x} - 1)$ est une fonction d'interpolation de la suite, dans le sens où $(a_n)_{n \geq 1}$ est donnée par $a_n = f(n)$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (si cette limite existe). Il suit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1,$$

où on a pu appliquer BH parce que $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$.

b) Comme au point i), la fonction $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$ est une fonction d'interpolation de la suite $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. On va d'abord calculer la limite de l'exposant :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1-(1/x)} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 - \frac{1}{x}} = -1,$$

où on a pu utiliser BH parce que $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$.

Finalement, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Exercice 6. (QCM : Révisions)

a) Si $f : X \rightarrow Y$ est croissante et bijective, alors $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est

- décroissante
- croissante
- ni croissante ni décroissante
- bornée

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire et bijective, alors f^{-1} est

- impaire
- paire
- ni paire ni impaire
- périodique

c) Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction bijective et bornée sur X , alors $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est

- bornée sur Y

- croissante
- paire
- aucun des autres choix n'est correct.

Sol.:

- a) $f : X \rightarrow Y$ est croissante et bijective, alors $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est croissante. En effet, prenons $y, y' \in Y$ tels que $y \leq y'$ et supposons que $f^{-1}(y) > f^{-1}(y')$. Comme f est croissante on a que $f(f^{-1}(y)) > f(f^{-1}(y'))$ ce qui implique que $y > y'$ en contradiction avec $y \leq y'$.
- b) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire et bijective, alors f^{-1} est impaire. En effet on a que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(f^{-1}(-x)) = -x = -f(f^{-1}(x)) = f(-f^{-1}(x))$ (on utilise que f est impaire dans la dernière égalité). Ainsi on a que $f(f^{-1}(-x)) = f(-f^{-1}(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En appliquant f^{-1} à cette égalité on obtient $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui montre que f^{-1} est impaire.
- c) Si f est bijective et bornée on ne peut rien en déduire sur f^{-1} (à part qu'elle est bijective, mais c'est banal). Il est clair que f^{-1} ne peut pas être paire car une fonction paire n'est pas injective. On a vu que si f est décroissante alors f^{-1} l'est aussi (même démonstration que pour croissant). Donc f^{-1} n'est pas forcément décroissante. L'exemple suivant montre aussi que f^{-1} n'a aucune raison d'être bornée sur Y . Prenons en effet $f :]1, +\infty[\rightarrow]0, 1[$ donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$. Cette fonction est bijective et bornée (car $]0, 1[$ est borné) mais son inverse $f^{-1} :]0, 1[\rightarrow]1, +\infty[$ donné par $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas une fonction bornée.

Exercice 7. (*) (Règles de dérivation)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . En partant de la définition de la dérivée d'une fonction, montrer les propriétés suivantes :

- a) $(f + g)' = f' + g'$
- b) $(fg)' = f'g + fg'$
- c) si de plus $f \neq 0$ sur I , $(1/f)' = -f'/f^2$

Sol :

- a) Soit $x \in I$. Alors

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

- b) Soit $x \in I$. Alors

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h)}{h} + \frac{f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \right) + \left(f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

c) Soit $x \in I$. Alors

$$\begin{aligned} (1/f)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x) \cdot f(x+h) \cdot h} \\ &= -\frac{1}{f(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f(x+h)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \end{aligned}$$

Exercice 8. (V/F : Dérivation)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) Si $f(x) = x + e^x$, alors $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

a) FAUX.

La formule pour la dérivée de la fonction réciproque est $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Ici on a $f'(x) = 1 + e^x$ et $f^{-1}(1) = 0$ puisque $f(0) = 1$. Ainsi

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

b) FAUX.

Prendre par exemple la fonction f de l'Ex. 1, $f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Alors f est dérivable sur $] - 1, 1[$ (en fait sur \mathbb{R}) mais sa dérivée n'est pas continue en 0 (cf. Ex. 1).

Exercice 9. (V/F : Propriétés de f et f' sur un intervalle)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \subset D(f)$, $a < b$, et dérivable sur $]a, b[$.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell$ existe, alors f est dérivable à droite en a et la dérivée à droite est $f'_d(a) = \ell$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Sol.:

a) *VRAI.*

Résultat du cours Preuve : Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Par le théorème des accroissements finis il existe $u \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(u)(x_2 - x_1)$. Puisque $f'(u) \geq 0$ il suit que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, c.-à-d. f est croissante.

b) *VRAI.*

Pour tout $x \in]a, b[$, la dérivée de f est par définition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Comme f est croissante sur $[a, b]$, $f(x+h) - f(x)$ est du même signe que h . Ainsi le quotient dans la limite est toujours positif et donc $f'(x) \geq 0$.

c) *FAUX.*

Prendre par exemple $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Cette fonction est strictement croissante sur $[-1, 1]$ mais $f'(0) = 0$.

d) *VRAI.*

Résultat du cours. Preuve comme à la question 1 en remplaçant \geq par $>$.

e) *VRAI.*

Soit $x \in]a, b[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ existe par hypothèse et que $\lim_{x \rightarrow a^+} c_x = a$, on a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} f'(c_x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{déf}}{=} f'_d(a),$$

*où * découle de la définition de la limite d'une fonction.*