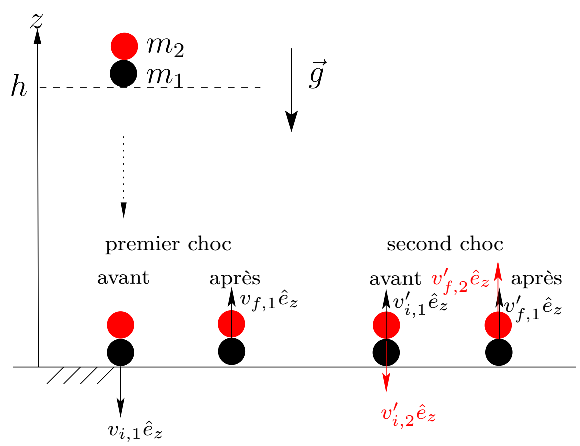
Corrigé Série 11 : Problème à deux corps, cinématique du solide

Question conceptuelle

Non, la quantité de mouvement de la balle n'est pas conservée car le sol applique une force extérieure au système de la balle. On note que les quantités de mouvement avant et après le choc, bien qu'ayant des normes égales, ne sont pas des vecteurs égaux. L'énergie cinétique quant à elle ne dépend que de la norme de la quantité de mouvement. Elle est donc conservée au moment du choc.

1 Rebond de deux balles



<u>Attention :</u> Dans cet exercice, la quantité v est la norme du vecteur $\vec{v}$ alors que les quantités telles v_i, v_f sont des composantes selon l'axe z, dirigé vers le haut selon la figure.
Nous considérons d'abord le cas où les deux chocs sont élastiques, puis nous traiterons le cas où le choc entre les deux balles est mou.

1.a) Comme indiqué dans la donnée, on décompose le problème en deux chocs élastiques. Le premier entre la balle m_1 et le sol suivi immédiatement après du deuxième entre les deux balles :

— avant le premier choc, la balle m_1 a une vitesse $v_i = -v$ (on a choisi l'axe $\hat{e}_z$ dirigé vers le haut). Le choc est parfaitement élastique (et la masse de la balle négligeable par rapport à celle de la terre), donc $v_f = -v_i = v$ (v_i et v_f sont les vitesses initiale et finale de la balle en projection sur l'axe $\hat{e}_z$). La vitesse v est donnée par la hauteur h et l'accélération gravifique. Par conservation de l'énergie mécanique dans la chute, on a $\frac{1}{2}m_i v^2 = m_i g h$ ($i = 1, 2$), et donc

$$v = \sqrt{2gh}$$

— avant le deuxième choc, la balle m_1 a une vitesse $v'_{i,1} = v$ et la balle m_2 une vitesse $v'_{i,2} = -v$. La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire

$$m_1 v - m_2 v = m_1 v'_{f,1} + m_2 v'_{f,2} \tag{1}$$

et la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_{f,1} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{f,2} \tag{2}$$

De l'équation (1), on tire

$$v'_{f,1} = \frac{(m_1 - m_2)v - m_2 v'_{f,2}}{m_1} \tag{3}$$

qu'on injecte dans (2) pour trouver

$$(m_2^2 + m_1 m_2)v'^2_{f,2} + 2(m_2^2 - m_1 m_2)vv'_{f,2} + (m_2^2 - 3m_1 m_2)v^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation du deuxième degré dont les solutions sont

$$v'_{f,2} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v \quad \text{et} \quad v'_{f,2} = -v$$

C'est la première solution qui nous intéresse (la deuxième correspond au cas où il n'y a pas eu de choc).

En injectant ce résultat dans (3), on trouve

$$v'_{f,1} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}v$$

1.b) Pour que les deux balles repartent vers le haut, il faut que $v'_{f,1} > 0$ et $v'_{f,2} > 0$. Ce qui donne respectivement les conditions

$$m_1 > 3m_2 \quad \text{et} \quad 3m_1 > m_2$$

Si la première condition est respectée, la deuxième l'est automatiquement. Si on veut que les balles repartent les deux vers le haut, il faut donc que $m_1 > 3m_2$. Dans le cas limite où $m_1 = 3m_2$, on a $v'_{f,1} = 0$, la balle m_1 reste immobile sur le sol.

1.c) Dans la limite où $m_1 \gg m_2$, on a

$$v'_{f,2} = 3v \quad \text{et} \quad v'_{f,1} = v \tag{4}$$

La hauteur à laquelle remontent les balles est donnée par l'équation du mouvement

$$\ddot{z} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -gt + v_0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$$

avec les conditions initiales $z_0 = 0$ et v_0 est le résultat obtenu en (4)

La hauteur maximale est atteinte pour $\dot{z}(t_{\text{max}}) = 0$, c'est-à-dire $t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}$ et donc

$$z_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Pour la balle m_1, on a $v_0 = v$, donc

$$z_{1,\,\text{max}} = \frac{v^2}{2g} = h.$$

Pour la balle m_2, la vitesse initiale est $3v$, ce qui nous donne

$$z_{2,\,\text{max}} = \frac{9v^2}{2g} = 9h.$$

Alternativement, on peut faire usage de la conservation de l'énergie mécanique. Par exemple, pour la balle de masse m_2 :

$$\frac{1}{2}m_2 v'^2_{f,2} = \frac{1}{2}m_2(3v)^2 = m_2 g z_{2,\,\mathrm{max}},$$

d'où on trouve immédiatement

$$z_{2,\,\mathrm{max}} = \frac{9v^2}{2g} = 9h.$$

On considère maintenant le cas où le choc entre les deux balles est mou. Les vitesses finales des deux balles sont donc égales, et nous les notons $v'_{f,1} = v'_{f,2} \equiv v'_f$.

2.a) Le raisonnement est similaire au cas des chocs élastiques, mais l'énergie mécanique n'est pas conservée au cours du choc mou. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit maintenant

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2)v'_f,$$

d'où l'on tire

$$v'_f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}$$

2.b) Pour que les balles partent vers le haut, il faut que la vitesse v'_f soit positive, et donc que $m_1 > m_2$. Si $m_1 = m_2$, les balles restent au sol.

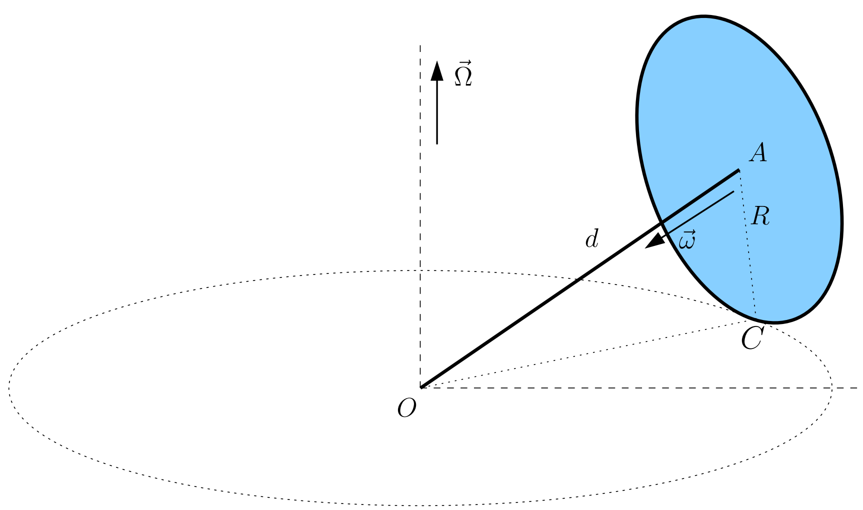
2.c) Si $m_1 \gg m_2$, la vitesse finale $v'_f = v$. Par la conservation de l'énergie mécanique pendant la phase de remontée, on trouve

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 + m_2)g z_{\mathrm{max}},$$

et donc

$$z_{\mathrm{max}} = \frac{v^2}{2g} = h.$$

2 Roue sur axe incliné



a) En considérant l'axe OA comme un solide de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, la vitesse du point A peut s'exprimer à partir de la vitesse du point O comme

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}\,, \tag{5}$$

où l'on a utilisé le fait que le point O est fixe, et a donc une vitesse nulle.

La rotation propre de la roue se fait autour de l'axe OA avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ parallèle au vecteur $\overrightarrow{AO}$. Par contre la roue est également entraînée par le mouvement de rotation de son axe, donné par le vecteur $\vec{\Omega}$ vertical. La roue est ainsi un solide de vitesse angulaire totale $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$. Comme le roulement est sans glissement, le point C de la roue en contact avec le sol a une vitesse nulle. La vitesse du centre A de la roue peut s'exprimer à partir de la vitesse de son point C comme

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + (\vec{\Omega}+\vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA} = (\vec{\Omega}+\vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA}\,. \tag{6}$$

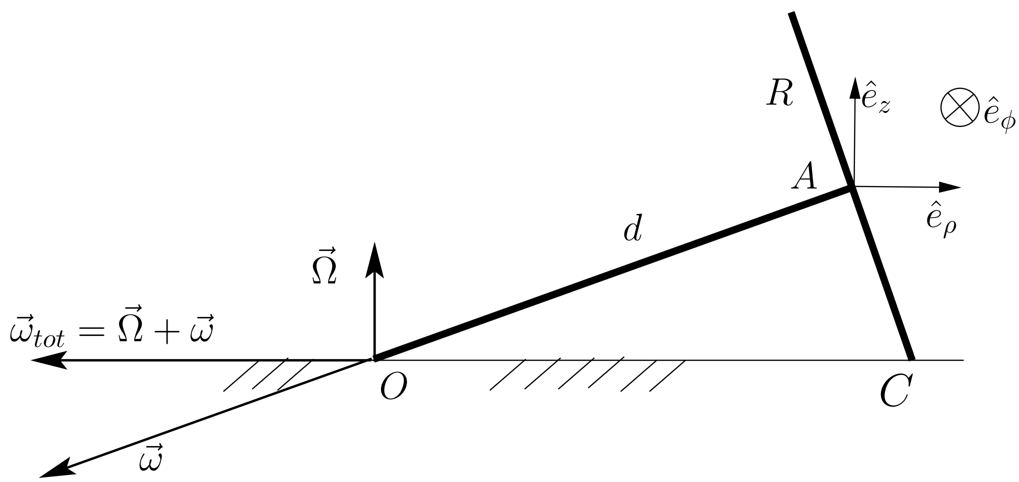
En égalisant les expressions (5) et (6) pour $\vec{v}_A$, on obtient

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = (\vec{\Omega}+\vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CA} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}\,,$$

c'est-à-dire

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OC}\,. \tag{7}$$

Les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont perpendiculaires, de même que les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{CA}$ (voir dessin).



Comme tous sont dans un même plan vertical contenant l'axe de la roue, les produits vectoriels sont dirigés selon un axe horizontal $\hat{e}_\phi$ perpendiculaire à ce plan. L'expression (7) devient ainsi

$$\omega R \hat{e}_\phi = \Omega \sqrt{d^2+R^2}\,\hat{e}_\phi\,,$$

où l'on a utilisé le fait que le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est de longueur $\sqrt{d^2+R^2}$ et le vecteur $\overrightarrow{CA}$ de longueur R. La vitesse angulaire ω vaut donc

$$\omega = \Omega\,\frac{\sqrt{d^2+R^2}}{R} = \Omega\,\sqrt{1+\frac{d^2}{R^2}}\,. \tag{8}$$

L'expression (7) implique que le sens du vecteur $\vec{\omega}$ pointe de A vers O.

b) Le plan tangent commun à la roue et au sol au point C est le sol lui-même. La vitesse angulaire de roulement $\omega_\parallel$ de la roue est donc la composante parallèle au sol du vecteur $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$. Comme le vecteur $\vec{\Omega}$ est vertical, on a

$$\omega_\parallel = \omega \cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \omega \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} = \Omega \frac{d}{R}\,.$$

La vitesse angulaire de pivotement $\omega_\perp$ de la roue est la composante perpendiculaire au sol du vecteur $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$, donc

$$\omega_\perp = \Omega - \omega \sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \Omega - \omega \frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}} = \Omega - \Omega = 0\,.$$

Le vecteur vitesse angulaire totale de la roue,

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\Omega} + \vec{\omega} = \vec{\omega}_\parallel + \vec{\omega}_\perp\,,$$

est donc horizontal.

<u>Note 1</u> : On peut aussi considérer la roue et l'axe comme un seul solide de vitesse angulaire $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$. Dans ce cas, on doit remplacer $\vec{\Omega}$ par $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$ dans l'équation (5), ce qui ne change rien puisque $\vec{\omega}$ est anti-parallèle au vecteur $\overrightarrow{OA}$. Par contre, on peut réaliser que ce solide a deux points de vitesse nulle, O et C. L'axe instantané de rotation est donc la droite OC, ce qui signifie que $\vec{\Omega}+\vec{\omega}$ doit être horizontal.

<u>Note 2</u> : Il est possible de résoudre cet exercice de façon totalement vectorielle. En effet, en multipliant l'équation (7) par le vecteur $\overrightarrow{CA}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}\right) &= \overrightarrow{CA} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OC}\right) \\
\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA}\right)\vec{\omega} - \left(\overrightarrow{CA} \cdot \vec{\omega}\right)\overrightarrow{CA} &= \left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC}\right)\vec{\Omega} - \left(\overrightarrow{CA} \cdot \vec{\Omega}\right)\overrightarrow{OC} \\
\left(R^2\right)\vec{\omega} - (0)\,\overrightarrow{CA} &= \left(-R^2\right)\vec{\Omega} - \left(\Omega R \cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})\right)\overrightarrow{OC} \\
R^2 \vec{\omega} &= -R^2 \vec{\Omega} - \Omega R d\, \hat{e}_\rho\,,
\end{aligned}$$

où $\hat{e}_\rho$ est un vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{OC}$. La vitesse angulaire de rotation propre de la roue vaut ainsi

$$\vec{\omega} = -\vec{\Omega} - \Omega \frac{d}{R}\,\hat{e}_\rho$$

et sa norme est bien donnée par l'équation (8). Le vecteur vitesse angulaire totale de la roue vaut

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} = -\Omega \frac{d}{R}\,\hat{e}_\rho\,,$$

d'où il est évident que la vitesse angulaire de pivotement de la roue (composante verticale de $\vec{\omega}_{\text{tot}}$) est nulle et que la vitesse de roulement (composante horizontale) a une norme de $\Omega d/R$.

3 Piston et bielle

a) La position d'un point P sur la barre est donnée par

$$\vec{r}_P = h \sin\alpha \vec{e}_x + (R\cos\theta + (L-h)\cos\alpha)\vec{e}_y. \tag{9}$$

On en déduit que la vitesse du point P est donnée par

$$\vec{v}_P = h\dot{\alpha}\cos\alpha \vec{e}_x - (R\dot{\theta}\sin\theta + (L-h)\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{e}_y. \tag{10}$$

b) De la même manière, on obtient la vitesse du point d'attache A :

$$\vec{v}_A = -(R\dot{\theta}\sin\theta + L\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{e}_y.$$

Il s'en suit que la vitesse d'un point P sur la barre s'écrit comme

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + h\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{e}_x + h\dot{\alpha}\sin\alpha\vec{e}_y.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP} &= \dot{\alpha}\vec{e}_z\wedge(h\sin\alpha\vec{e}_x - h\cos\alpha\vec{e}_y)\\ &= h\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{e}_x + h\dot{\alpha}\sin\alpha\vec{e}_y.\end{aligned}$$

On a donc bien que $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP}$.

c) Les angles θ et α sont reliés par

$$R\sin\theta = L\sin\alpha \implies R\dot{\theta}\cos\theta = L\dot{\alpha}\cos\alpha.$$

En injectant cette relation dans l'expression (10) de la vitesse du point P, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= h\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{e}_x - (L\dot{\alpha}\cos\alpha\tan\theta + (L-h)\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{e}_y\\ &= \dot{\alpha}\vec{e}_z\wedge\big[\underbrace{-(L\cos\alpha\tan\theta + (L-h)\sin\alpha)\vec{e}_x - h\cos\alpha\vec{e}_y}_{\overrightarrow{IP}}\big]\\ &= \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{IP}.\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{IP}$ est relié aux vecteurs de position $\vec{r}_P$ et $\vec{r}_I$ des points P et I par $\overrightarrow{IP} = \vec{r}_P - \vec{r}_I$. On a donc

$$\vec{r}_I = \vec{r}_P - \overrightarrow{IP}.$$

Comme le vecteur de position $\vec{r}_P$ est donné par l'équation (9), on obtient

$$\begin{aligned}\vec{r}_I &= (L\cos\alpha\tan\theta + L\sin\alpha)\vec{e}_x + (R\cos\theta + L\sin\alpha)\vec{e}_y\\ &= L\Big[(\cos\alpha\tan\theta + \sin\alpha)\vec{e}_x + \Big(\frac{\sin\alpha}{\tan\theta} + \sin\alpha\Big)\vec{e}_y\Big].\end{aligned}$$

Le point I correspond au centre instantané de rotation.

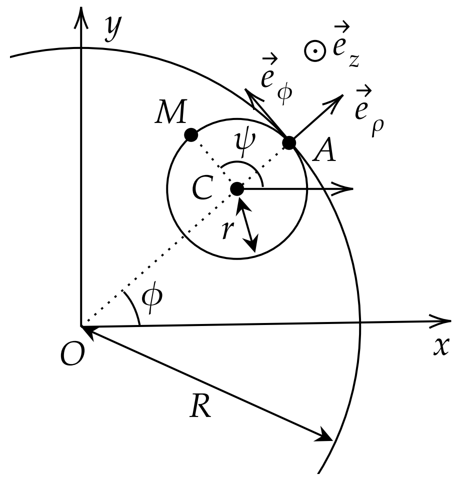
4 Disque sur cercle

a) La vitesse du centre C du disque est donnée par

$$\vec{v}_C = \dot{\phi}\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{OC}.$$

b) La vitesse d'un point M sur le disque est donnée par

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \dot{\psi}\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{CM}. \tag{11}$$



c) La condition de roulement sans glissement impose que la vitesse du point de contact A est nulle, i.e. $\vec{v}_A = \vec{0}$. En utilisant l'équation (11) pour le point de contact A, cette condition s'écrit

$$\begin{aligned} &\vec{v}_A = \vec{v}_C + \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{0} \\ \Longrightarrow\ &\dot{\phi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OC} + \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{0}. \end{aligned}$$

En projetant les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CA}$ dans un repère cylindrique associé au disque, on obtient

$$\begin{aligned} &(R-r)\dot{\phi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho + r\dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{0} \\ \Longrightarrow\ &(R-r)\dot{\phi}\vec{e}_\phi + r\dot{\psi}\vec{e}_\phi = \vec{0}. \end{aligned}$$

Donc, la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$(R-r)\dot{\phi} + r\dot{\psi} = 0.$$

Complément du cours

Dans un repère cartésien, les coordonnées des trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont données par

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) \\ a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x) \\ a_x(b_z c_x - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_y c_y b_x - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x - a_z c_z b_x \\ a_z c_z b_y - a_z b_z c_y - a_x b_x c_y - a_x c_x b_y \\ a_x c_x b_z - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z - a_y c_y b_z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{c}) b_x - a_x c_x b_x - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c_x + a_x b_x c_x \\ (\vec{a} \cdot \vec{c}) b_y - a_y c_y b_y - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c_y + a_y b_y c_y \\ (\vec{a} \cdot \vec{c}) b_z - a_z c_z b_z - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c_z + a_z b_z c_z \end{pmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.
\end{aligned}$$