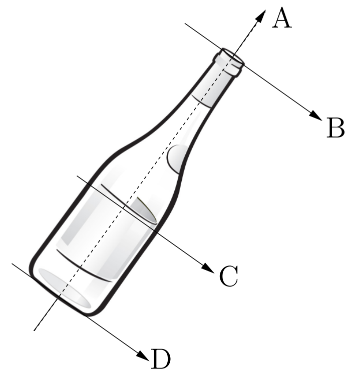
Série 12 : Moment d'inertie

Question conceptuelle

On considère une bouteille pleine. Ordonner les moments d'inertie autour des quatre axes présentés sur le dessin : l'axe de symétrie de la bouteille A, et les trois axes perpendiculaires à A et passant par le bouchon de la bouteille B, son centre de masse C, et par sa base D. Sachant que $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$, identifier à quel axe correspond chaque moment d'inertie.

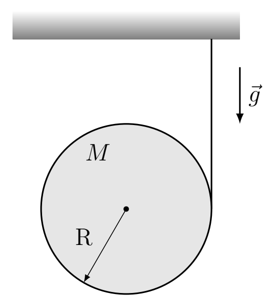


1 Yoyo

Un yoyo consiste en un disque de rayon R et de masse M, autour duquel un fil sans masse est enroulé. Le fil est attaché au plafond et reste en tout temps vertical, et le yoyo est libre de descendre sous l'action de la gravité.

a) Calculer le moment d'inertie I du disque autour d'un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre.

b) Déterminer l'acceleration $\vec{a}$ du centre de masse du yoyo, ainsi que la tension $\vec{T}$ dans le fil.



2 Volant et châssis

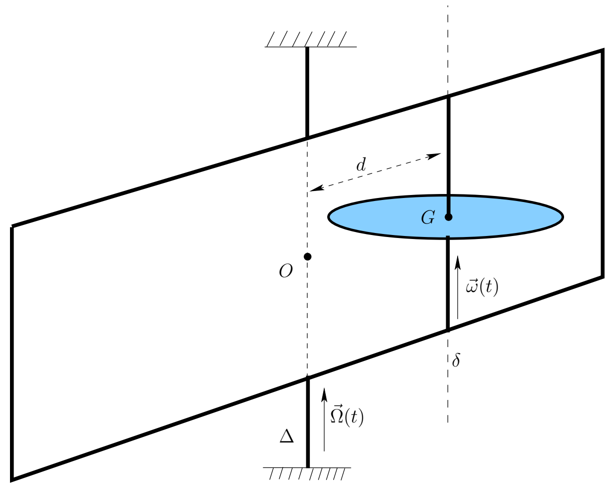
Un volant horizontal peut tourner autour d'un axe vertical δ passant par son centre de masse G. Cet axe est solidaire d'un châssis pouvant tourner autour d'un autre axe vertical Δ. Les deux axes sont séparés d'une distance d et on note O le point de l'axe Δ à une distance d du point G. Le volant (resp. le châssis tout seul) a une masse m (resp. M) et admet l'axe δ (resp. Δ) comme axe principal d'inertie, par rapport auquel il a un moment d'inertie $I_{\mathrm{v},\delta}$ (resp. $I_{\mathrm{c},\Delta}$). Le volant et le châssis sont équipés chacun d'un système de freinage (sans masse) qui permet, par l'application d'un couple de force, de les immobiliser autour de leur axe de rotation. Soient $\vec{\omega}(t)$ la vitesse angulaire de rotation propre du volant (par rapport au châssis) et $\vec{\Omega}(t)$ la vitesse angulaire de rotation propre du châssis.

a) Donner l'expression du moment cinétique total du système volant+châssis par rapport au point O.

b) Initialement, à $t = t_0$, on a $\vec{\omega}(t_0) = \vec{\omega}_0$ et $\vec{\Omega}(t_0) = \vec{0}$. On enclenche le système de freinage du volant jusqu'à ce que, pour un temps $t_1 > t_0$ on obtienne $\vec{\omega}(t_1) = \vec{0}$. Que vaut alors $\vec{\Omega}(t_1)$?

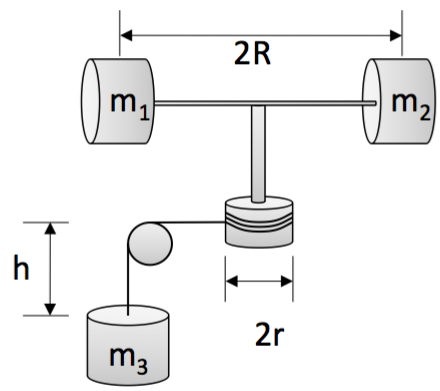
c) Au temps t_1, on relâche le frein du volant et on active le frein du châssis jusqu'à ce que, pour un temps $t_2 > t_1$ on obtienne $\vec{\Omega}(t_2) = \vec{0}$. Que vaut alors $\vec{\omega}(t_2)$?

d) A un temps t quelconque, où se trouve l'axe de rotation instantané du volant ?



3 Moment d'inertie d'un haltère entrainé par un poids

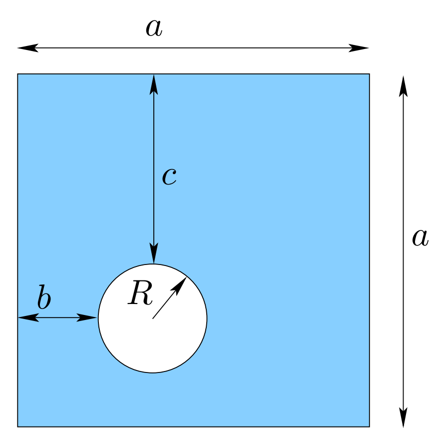
Un haltère formé de deux masses m_1 et m_2 est fixé horizontalement sur un axe vertical sans masse de rayon r, entraîné (par l'intermédiaire d'un câble et d'une poulie fixe sans masse) par une masse m_3 comme indiqué sur la figure. Le système est initialement au repos. On laisse ensuite chuter la masse m_3 d'une hauteur h. On néglige tous les frottements.



a) Déterminer l'accélération angulaire de l'haltère.

b) Dans l'hypothèse où $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et où r peut être négligé par rapport à R ($r \ll R$), déterminer comment la vitesse angulaire et comment le temps de chute sont affectés lorsque R est triplé.

4 Plaque percée



On considère une plaque carrée de côté a et de masse volumique uniforme. On perce un trou circulaire de rayon R dans la plaque de sorte que les distances du bord du trou à deux bords adjacents de la plaque valent b et c, avec b, $c < a - 2R$ (voir dessin).
Déterminer la position du centre de masse de la plaque avant et après y avoir percé le trou.