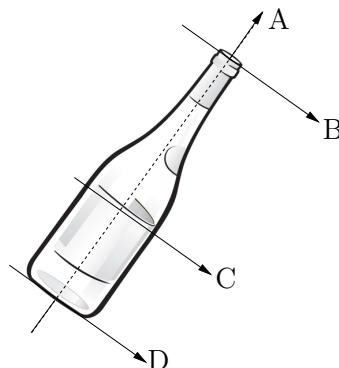


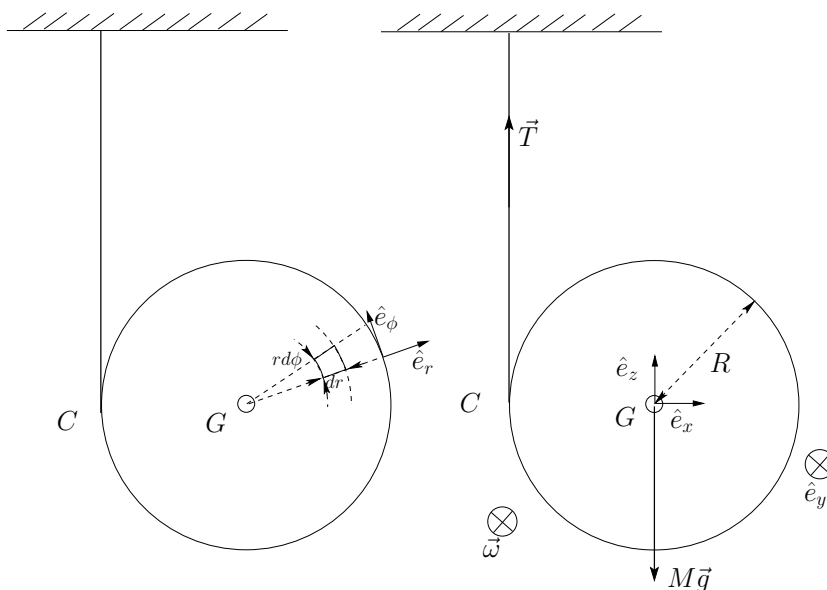
Corrigé Série 12 : Moment d'inertie

Question conceptuelle

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ fixe dépend du carré des distances d_α^2 à l'axe de chacun des éléments de masse m_α selon la relation $I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$. Dans le cas de la bouteille, c'est par rapport à l'axe A que les carrés des distances sont en moyenne les plus petites, donc $I_1 = I_A$. Par un même raisonnement basé sur la géométrie de la bouteille, on trouve que $I_2 = I_C$, $I_3 = I_D$, et $I_4 = I_B$.



1 Yoyo



- a) Le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe de symétrie de révolution est donné par la double intégrale prise sur la surface du disque :

$$I_{\text{disque}} = \int_{\text{disque}} r^2 dm = \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sigma r d\phi dr = \sigma \int_{r=0}^R r^3 dr \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$I_{\text{disque}} = \frac{2\pi}{4} \sigma R^4, \tag{1}$$

où l'élément de surface utilisé est $rd\phi dr$, et σ est la masse surfacique (i.e. la masse par unité de surface) donnée par $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$. On obtient finalement le moment d'inertie pour le disque

$$I_{\text{disque}} = \frac{1}{2} MR^2. \tag{2}$$

b) Pour résoudre ce problème, on va utiliser les équations du mouvement du yoyo. Les forces qui s'appliquent sur le yoyo sont son poids $\vec{P} = M\vec{g}$, dirigé vers le bas, et la tension dans le fil \vec{T} , dirigée vers le haut. Les équations du mouvement sont données d'une part par le théorème du centre de masse (deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse) qui projeté sur \hat{e}_z donne

$$-Ma_G = -Mg + T, \quad (3)$$

et d'autre part par le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_{\text{disque}}\dot{\omega}\hat{e}_y = \Sigma\vec{M}_G = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{GC} \wedge \vec{T}.$$

qui projeté sur \hat{e}_y donne

$$I_{\text{disque}}\dot{\omega} = RT. \quad (4)$$

Tous les points du fil ont une vitesse nulle y compris donc au point de contact C ($v_C = 0$). On a ainsi $\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_C}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$ (\vec{v}_G pointe bien vers le bas) donc la vitesse et l'accélération angulaire du disque sont reliées par

$$v_G = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_G}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a_G}{R}. \quad (5)$$

En combinant les équations (2), (4) et (5), on obtient

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a_G}{R} = R(Mg - Ma_G).$$

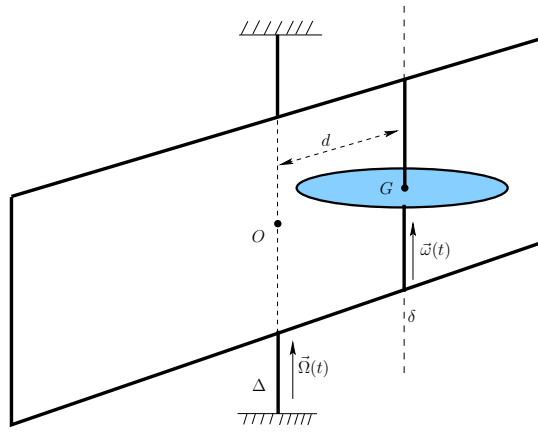
En résolvant pour a_G , on trouve

$$a_G = \frac{2}{3}g. \quad (6)$$

Et par substitution dans l'équation (3), on obtient :

$$T = M(g - a_G) = M\left(g - \frac{2}{3}g\right) = \frac{Mg}{3}. \quad (7)$$

2 Volant et châssis



- a) Le volant tourne autour d'un axe principal d'inertie avec une vitesse angulaire de rotation totale $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$; son moment cinétique par rapport au point G vaut ainsi

$$\vec{L}_{v,G} = I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}). \quad (8)$$

On obtient son moment cinétique par rapport à O par le théorème du transfert :

$$\vec{L}_{v,O} = \vec{L}_{v,G} + \vec{OG} \wedge m\vec{v}_G = I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) + \vec{OG} \wedge m\vec{v}_G. \quad (9)$$

Le point O étant immobile et les points G et O appartenant tous deux au châssis, leurs vitesses doivent satisfaire

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \vec{OG} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OG}. \quad (10)$$

Le châssis tourne également autour d'un axe principal d'inertie et son moment cinétique par rapport à O vaut

$$\vec{L}_{c,O} = I_{c,\Delta} \vec{\Omega}. \quad (11)$$

En combinant les relations ci-dessus, le moment cinétique total du système volant+châssis par rapport à O vaut alors :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{tot},O} = \vec{L}_{c,O} + \vec{L}_{v,O} &= I_{c,\Delta} \vec{\Omega} + I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) + \vec{OG} \wedge m(\vec{\Omega} \wedge \vec{OG}) \\ &= I_{c,\Delta} \vec{\Omega} + I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) + m \left(\vec{OG}^2 \vec{\Omega} - (\vec{OG} \cdot \vec{\Omega}) \vec{OG} \right) \\ &= I_{c,\Delta} \vec{\Omega} + I_{v,\delta} (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) + md^2 \vec{\Omega} \\ \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot},O} &= (I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2) \vec{\Omega} + I_{v,\delta} \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (12)$$

- b) Les seules forces horizontales extérieures au système volant+chassis s'appliquent sur l'axe du chassis et donc le système ne subit aucun moment de force extérieure vertical. La composante verticale du moment cinétique total (par rapport à n'importe quel point du référentiel) est ainsi constante. Le moment cinétique total par rapport au point O , donné par l'équation (12), est vertical et est donc un vecteur constant au cours du temps. En particulier, on a

$$\vec{L}_{\text{tot},O}(t_1) = \vec{L}_{\text{tot},O}(t_0),$$

ce qui donne

$$(I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2) \underbrace{\vec{\Omega}(t_1)}_{=\vec{0}} + I_{v,\delta} \underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} = (I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2) \underbrace{\vec{\Omega}(t_0)}_{=\vec{0}} + I_{v,\delta} \vec{\omega}_0,$$

et donc

$$\vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,\delta}}{I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2} \vec{\omega}_0. \quad (13)$$

- c) Les forces de freinage sur le châssis sont extérieures au système volant+châssis ; elles exercent un moment vertical qui modifie le moment cinétique total entre t_1 et t_2 . Considérons uniquement le volant : entre les temps t_1 et t_2 , ce dernier subit son poids vertical vers le bas, et trois autres forces exercées par le châssis : une force de soutien vers le haut (compensant le poids), une force centripète (dans la direction de \overrightarrow{GO}), et une force horizontale de direction opposée à \vec{v}_G . Cette force s'applique au point G et va le freiner jusqu'à ce qu'il s'immobilise. Aucune de ces forces n'a un moment par rapport au point G , et donc le moment cinétique du volant par rapport au point G reste constant,

$$\vec{L}_{v,G}(t_2) = \vec{L}_{v,G}(t_1),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} I_{v,\delta} (\underbrace{\vec{\omega}(t_2) + \vec{\Omega}(t_2)}_{=\vec{0}}) &= I_{v,\delta} (\underbrace{\vec{\omega}(t_1) + \vec{\Omega}(t_1)}_{=\vec{0}}), \\ I_{v,\delta} \vec{\omega}(t_2) &= I_{v,\delta} \vec{\Omega}(t_1), \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'équation (13) :

$$\vec{\omega}(t_2) = \vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,\delta}}{I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2} \vec{\omega}_0. \quad (14)$$

- d) Comme vu au cours, un point C sur l'axe instantané de rotation du volant doit satisfaire à

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC} &= \frac{(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{v}_G}{(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2} = \frac{(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OG})}{(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2} \\ &= \frac{((\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \cdot \overrightarrow{OG}) \vec{\Omega} - ((\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{OG}}{(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2} \\ &= -\frac{(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega}}{(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2} \overrightarrow{OG} = -\frac{(\omega + \Omega)\Omega}{(\omega + \Omega)^2} \overrightarrow{OG} = -\frac{\Omega}{\omega + \Omega} \overrightarrow{OG}, \end{aligned} \quad (15)$$

et donc

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = \left(1 - \frac{\Omega}{\omega + \Omega}\right) \overrightarrow{OG} = \frac{\omega}{\omega + \Omega} \overrightarrow{OG}. \quad (16)$$

L'axe de rotation instantané du volant est vertical et passe par le point C situé entre les points O et G à une distance $\omega d/(\omega + \Omega)$ du point O . Quand $\vec{\Omega}(t) = \vec{0}$, par exemple aux temps t_0 ou t_2 , $C = G$ et l'axe de rotation instantané est δ ; quand $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$, par exemple au temps t_1 , $C = O$ et l'axe de rotation instantané est Δ .

3 Moment d'inertie d'un haltère entraîné par un poids

- a) La masse m_3 subit la force de pesanteur $\vec{F} = m_3\vec{g}$ et la force de tension \vec{T} exercée par le câble. L'équation du mouvement de la masse m_3 , projetée sur un axe z vertical (pointant vers le haut) est :

$$m_3\ddot{z} = -m_3g + T,$$

donc

$$T = m_3(g + \ddot{z}), \quad (17)$$

où T est la norme du vecteur \vec{T} .

Nous avons donc besoin de lier T à d'autres quantités. Pour cela, nous pouvons considérer un second système composé de l'haltère, son axe de rotation vertical et la roue en bas. Le mouvement de ce système est contraint à tourner uniquement autour de son axe de rotation vertical, que l'on peut donc considérer comme un axe principal. Le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical est donné par

$$I = (m_1 + m_2)R^2.$$

Le point C est immobile, ce qui nous permet d'écrire

$$\vec{L} = I\dot{\theta}\vec{e}_z, \text{ où } \dot{\theta} = \omega.$$

Les forces extérieures s'appliquant sur le système sont la gravité, la réaction du support et la tension du câble \vec{T}' . Hormis \vec{T}' , aucune de ces forces ne contribue au moment en C dans la direction \vec{e}_z , ce qui nous donne :

$$I\ddot{\theta} = \vec{M}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_z = (\vec{CA} \wedge \vec{T}') \cdot \vec{e}_z,$$

où A est le point où la tension s'applique. De même qu'à l'exercice 1, on a (la composante verticale de \vec{CA} ne contribue pas)

$$\vec{CA} \wedge \vec{T}' \cdot \vec{e}_z = \vec{r} \wedge \vec{T}' \cdot \vec{e}_z = \pm rT'$$

où le signe dépend du sens dans lequel le fil s'enroule autour de l'axe de rotation. Si nous supposons que le fil se dévide lorsque nous tournons l'haltère dans le sens radian, alors

$$\vec{r} \wedge \vec{T}' = rT'\vec{e}_z.$$

$$T' = \frac{I\ddot{\theta}}{r}.$$

Enfin, le fil connectant le système à la masse m_3 , nous avons

$$z = z_0 - r\theta, \text{ soit } \ddot{z} = -r\ddot{\theta}.$$

Au final, nous obtenons :

$$m_3\ddot{z} = -m_3g + \frac{I\ddot{\theta}}{r}$$

$$m_3\ddot{z} = -m_3g - \frac{I\ddot{z}}{r^2}$$

$$\ddot{z} = -\frac{g}{1 + \frac{I}{m_3r^2}} = -\frac{m_3r^2g}{m_3r^2 + I}$$

ou encore

$$\ddot{\theta} = \frac{m_3rg}{m_3r^2 + I}.$$

b) Si $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et si $r \ll R$, on a l'approximation suivante :

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{rg}{r^2 + 2R^2} \approx \frac{rg}{2R^2} \quad (18)$$

En utilisant la vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}(0) = 0$ on a :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{rg}{2R^2}t \quad (19)$$

et

$$\theta(t) = \frac{rg}{4R^2}t^2 + \theta_0. \quad (20)$$

Si R est multiplié par 3, la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ est divisée par $3^2 = 9$.

Une chute de la masse m_3 d'une hauteur h correspond à une rotation d'un angle $\theta - \theta_0 = h/r$.

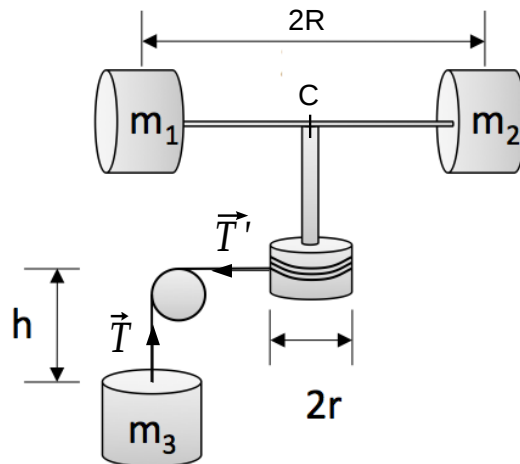
Le temps de chute t_h satisfait alors à :

$$h/r = \frac{rg}{4R^2}t_h^2 \quad (21)$$

soit :

$$t_h = \sqrt{\frac{4R^2}{r^2g}h} = \frac{2R}{r} \sqrt{\frac{h}{g}}. \quad (22)$$

Si R est multiplié par 3, le temps de chute est multiplié par 3.



4 Plaque percée

La plaque entière peut être considérée comme la combinaison de la plaque percée (de masse M et de

centre de masse \vec{r}_G) et du disque de rayon R (de masse M_d et de centre de masse \vec{r}_d). Alors, son centre de masse est donné par :

$$\vec{r}_{G,c} = \frac{1}{M + M_d} (M\vec{r}_G + M_d\vec{r}_{G,d}) \quad (23)$$

où M est la masse de la plaque percée et \vec{r}_G son centre de masse que l'on cherche. De cette équation, on tire :

$$\vec{r}_G = \frac{(M + M_d)\vec{r}_{G,c} - M_d\vec{r}_{G,d}}{M} \quad (24)$$

De plus, il n'est pas nécessaire d'intégrer pour trouver le centre de masse d'objets simples comme un carré ou un disque. En effet, dans le repère Oxy indiqué sur la figure, les coordonnées du centre de masse du carré non percé sont

$$\vec{r}_{G,c} = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \end{pmatrix},$$

et les coordonnées du centre de masse du disque sont

$$\vec{r}_{G,d} = \begin{pmatrix} b + R \\ c + R \end{pmatrix}.$$

On peut donc aisément déduire les coordonnées du centre de masse de la plaque percée :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{(M + M_d)\frac{a}{2} - M_d(b + R)}{M} = \frac{a}{2} + \frac{M_d}{M} \left(\frac{a}{2} - b - R \right) \\ &= \frac{a}{2} + \frac{\pi R^2}{a^2 - \pi R^2} \left(\frac{a}{2} - b - R \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{(M + M_d)\frac{a}{2} - M_d(c + R)}{M} = \frac{a}{2} + \frac{M_d}{M} \left(\frac{a}{2} - c - R \right) \\ &= \frac{a}{2} + \frac{\pi R^2}{a^2 - \pi R^2} \left(\frac{a}{2} - c - R \right). \end{aligned} \quad (26)$$

