Analyse I – Série 12 – Corrigé

Echauffement. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les séries de Mac-Laurin et leurs rayons de convergence pour les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(x)$ b) $f(x) = \cos(x)$ c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = e^{-x}$ e) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ f) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$

g) $f(x) = \operatorname{Log}(1+x)$ h) $f(x) = \operatorname{Log}(1-x)$

Sol.: *On part des formules vues en cours :*

a) $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^n, \quad x \in \mathbb{R}$

e) $\operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\underbrace{1-(-1)^n}_{=\begin{cases}0,\ n\ pair\\ 2,\ n\ impair\end{cases}}\Big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

f) $\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\underbrace{1+(-1)^n}_{=\begin{cases}0,\ n\ impair\\ 2,\ n\ pair\end{cases}}\Big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$

g) $\operatorname{Log}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{n+1}, \quad x \in\,]-1,1]$

h) $\operatorname{Log}(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(-x)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}\, x^n, \quad x \in [-1,1[$

Exercice 1. (Formules de dérivées)

Vérifier les identités suivantes à l'aide des séries de Mac-Laurin :

a) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ b) $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

c) $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$ d) $\frac{d}{dx}\operatorname{Log}(1+x) = \frac{1}{1+x}$

Sol.:

Notez que dans les exemples ci-dessous on peut échanger la dérivation et la somme infinie parce qu'il s'agit de séries entières qui convergent, mais gardez à l'esprit que cet échange n'est pas toujours autorisé dans le cas général. Pour la série de Mac-Laurin $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *on a donc*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx}(x^n)\,.$$

a) $\dfrac{d}{dx}e^x = \dfrac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\,x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)!}\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\,x^n = e^x$

b) $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} = \cos(x)$

c) $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!}\,x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} = -\sin(x)$

d) $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Log}(1+x) = \dfrac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}, \quad |x|<1$ *(série géométrique)*

Exercice 2. (Séries entières)

Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{3+4x}$ autour de a et déterminer l'intervalle de convergence pour

a) $a = 0$ b) $a = 2$

Sol.: *On utilise que le développement de* $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *en série entière est* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ *pour tout* $z \in]-1,1[$.

1. *On peut récrire*

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}x}\ .$$

Ainsi, en posant $z := -\frac{4}{3}x$, *on obtient que son développement en série entière est*

$$f(x) = \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n \qquad \text{pour } x \in \left]-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right[.$$

2. *De faèon similaire, on peut récrire*

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{11+4(x-2)} = \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{11}(x-2)}$$

de telle sorte qu'en posant $z := -\frac{4}{11}(x-2)$, *on obtient que son développement en série entière est*

$$f(x) = \frac{2}{11}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{11}\right)^n (x-2)^n,$$

avec intervalle de convergence $\left]-\frac{3}{4},\frac{19}{4}\right[$ *(obtenue è partir de* $z = -\frac{4}{11}(x-2) \in]-1,1[$*).*

Remarque générale : On peut aussi calculer le rayon de convergence de ces séries en utilisant les formules du cours

$$r = 1\Big/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{ou} \qquad r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{1}$$

si ces limites existent.

Exercice 3. (Séries de Taylor)

Étudier la limite $n\to\infty$ du développement limité d'ordre n autour de $x=a$, pour chacune des fonctions ci-dessous (en particulier, étudier le reste $R_n(x)$ comme vu en cours pour $x\mapsto 1/(1-x)$). Ensuite, donner la série de Taylor de f autour de a, ainsi que son domaine de convergence.

a) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $a = 0$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ avec $a = 2$.

Sol.: *Si $f \in C^\infty(I)$, la série de Taylor de f en a est donnée par $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ pour $x \in I$ ($S(x)$ ne coincide pas nécessairement avec $f(x)$).*

1. *On a $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x+1}$ et $f^{(n)}(0) = 2^n \cdot e$. Ainsi le développement limité d'ordre n de f autour de $a = 0$ est*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k e}{k!}\, x^k + R_n(x) \quad \textit{avec} \quad R_n(x) = \frac{2^{n+1} \cdot e^{2u+1}}{(n+1)!}\, x^{n+1} \quad \textit{pour un certain } u \textit{ entre } 0 \textit{ et } x.$$

La série de Taylor de f autour de $a = 0$ est donnée par

$$S(x) = e^{2x+1} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, x^n \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et son rayon de convergence est $R = \infty$.
En outre, étant donné que pour x fixé

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{2^{n+1} \cdot e \cdot \max\{e^{2x}, 1\}}{(n+1)!}\, |x|^{n+1},$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2|x|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,.$$

il suit que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $S(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. *On utilise directement la formule de Taylor. On calcule que*

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} \qquad \textit{et} \qquad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{3^{n+1}}\,.$$

D'où le développement limité d'ordre n de $f(x)$ autour de 2 :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}}(x-2)^k}_{=f_n(x)} + R_n(x)$$

où $R_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{u+1}\left(\dfrac{x-2}{u+1}\right)^{n+1}$ pour un certain u entre 2 et x.
Par ailleurs, on peut reconnaitre en $f(x)$ la somme d'une série géométrique. On obtient

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\,(x-2)^n$$

qui converge si et seulement si $-1 < -\frac{1}{3}(x-2) < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 5$, et on reconnait la série de Taylor de $f$qui coincide, dans ce cas, avec f pour $-1 < x < 5$. Ceci montre par ailleurs que $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}}\,(x-2)^k$ et donc converge vers 0 si et seulement si $-1 < x < 5$.

Exercice 4. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les trois premiers termes (non nuls) de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\mathrm{Log}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ b) $f(x)=\mathrm{tg}(x)$

c) $f(x)=\mathrm{Arctg}(x)$ (utiliser la formule de Taylor) d) $f(x)=\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}$

Sol.:

1. *Observons que* $\mathrm{Log}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\mathrm{Log}(1-x)-\mathrm{Log}(1+x)$. *Ainsi on peut calculer la série complète de Mac-Laurin en additionnant terme par terme les séries trouvées à l'Echauffement vii) et viii) (ceci est permis puisque les deux séries convergent absolument pour* $x\in\,]-1,1[$*). On obtient alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}\,x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\underbrace{-\frac{1}{n}-\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{=\begin{cases}-2,\ n\ \textit{impair}\\ 0,\ n\ \textit{pair}\end{cases}}\Bigg)x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{2k+1}\,x^{2k+1}\,.$$

Remarque : Pour obtenir seulement les trois premiers termes de la série, on pourrait aussi utiliser les développements limités adéquats de $\mathrm{Log}(1-x)$ *et* $\mathrm{Log}(1+x)$.

2. *<u>Méthode 1</u> : Utiliser l'égalité* $\mathrm{tg}(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *et les développements limités d'ordre* 5 *de*

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+x^5\varepsilon(x)\qquad \textit{et}\qquad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^5\varepsilon(x)\,.$$

ainsi que celui d'ordre 2 *de*

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,x^2+x^2\varepsilon(x)\,.$$

Comme $\cos(x)-1=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)$ *, on obtient*

$$\frac{1}{\cos(x)}=1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)\right)+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)\right)^2+x^4\varepsilon(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)$$

et ainsi

$$\mathrm{tg}(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+x^5\varepsilon(x)\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x)\,,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{tg}(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x)\,.$$

<u>Méthode 2</u> : Utiliser la définition de la série Taylor et donc calculer les dérivées de $f(x)=\mathrm{tg}(x)$ *qui sont :*

$$f'(x)=\frac{1}{\cos(x)^2},\qquad f''(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos(x)^3},\qquad f'''(x)=\frac{2+4\sin(x)^2}{\cos(x)^4},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{8\sin(x)\,(2+\sin(x)^2)}{\cos(x)^5},\qquad f^{(5)}(x)=\frac{8\,(2+11\sin(x)^2+2\sin(x)^4)}{\cos(x)^6},$$

$$f(0)=0,\qquad f'(0)=1,\qquad f''(0)=0,\qquad f'''(0)=2,\qquad f^{(4)}(0)=0,\qquad f^{(5)}(0)=16.$$

Ainsi

$$\mathrm{tg}(x)=\frac{1}{1!}x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+x^5\varepsilon(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x).$$

3. *On calcule*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-48x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{24x}{(1+x^2)^3}, \qquad f^{(5)}(x) = \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{24}{(1+x^2)^3},$$

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -2, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 24.$$

Ainsi

$$\mathrm{Arctg}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{24}{5!}x^5 + x^5\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x).$$

4. *On utilise que pour* $|x| < 1$ *on a* $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ *avec* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\mathrm{tg}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$*. Ainsi*

$$\Big(1+\mathrm{tg}(x)\Big)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(x) - \frac{1}{8}\,\mathrm{tg}(x)^2 + \frac{1}{16}\,\mathrm{tg}(x)^3 + \underbrace{\mathrm{tg}(x)^3\varepsilon\Big(\mathrm{tg}(x)\Big)}_{=x^3\varepsilon(x)},$$

où $\mathrm{tg}(x)^3\varepsilon\Big(\mathrm{tg}(x)\Big) = x^3\varepsilon(x)$ *par un argument comme à l'Ex. 5iii) de la Série 11 parce que* $\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}$ *est aussi borné autour de* $x = 0$*. Comme*

$$\mathrm{tg}(x)^2 = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)\right)^2 = x^2 + x^3\varepsilon(x)$$

et

$$\mathrm{tg}(x)^3 = \Big(x^2 + x^3\varepsilon(x)\Big)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)\right) = x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

on a finalement

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)} = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{11x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)\ .$$

Exercice 5. (V/F : Dérivées d'ordre supérieur)

Soient I un intervalle ouvert, $f, g \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Soient encore $k, n \in \mathbb{N}$.

V F

a) Pour $n \geq 6$, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < 7$ et $f^{(7)}(a) = 1$, alors f admet un minimum en a. ☐ ☐

b) Si $I =]-b, b[$ pour un $b > 0$ et f est impaire sur I, alors $f^{(2k)}(0) = 0$ pour $0 \leq 2k \leq n$. ☐ ☐

c) Si $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < n$ et $g^{(n)}(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$. ☐ ☐

Sol.:

a) *FAUX.*
Le développement limité d'ordre de 7 de f *en* a *est donné par* $f(a+h) = \frac{f^{(7)}(a)}{7!}h^7 + h^7 \cdot \varepsilon(h) = h^7(\frac{1}{7!} + \varepsilon(h))$*. Comme* $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$*, il existe* $\varepsilon_1 > 0$ *tel que* $\frac{1}{7!} + \varepsilon(h) > 0$ *du moment que* $|h| \leq \varepsilon_1$*. Comme* 7 *est impair, on a donc* $f(a+h) < 0 = f(a)$ *pour* $h \in [-\varepsilon_1, 0[$ *et* $f(a+h) > 0 = f(a)$ *pour* $h \in]0, \varepsilon_1]$ *donc* f *n'admet pas de minimum local en* a*.*

b) VRAI.
Comme $f \in C^{n+1}(I)$, son développement limité d'ordre n autour de 0 est

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

si bien que

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Or, comme f est impaire et $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pour $k = 0, \ldots, n$ par la formule de Taylor (s'il existe un développement limité, il est unique), il suit que

$$\begin{aligned} & a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + x^n \varepsilon(x) = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \Leftrightarrow \quad & a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + x^n \varepsilon(x) = -a_0 - a_2 x^2 - \cdots - a_{2k} x^{2k} + x^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in I$, d'où le résultat.

c) VRAI.
Les développements limités d'ordre n de f et g autour de a sont

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varepsilon(x)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \varepsilon(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

grâce à la propriété de $\varepsilon(x)$.

Exercice 6. (V/F : Fonction définie par un développement limité)

Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = bx + cx^2 + x^4 \varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

	V	F
a) Alors f est continue en 0.	☐	☐
b) Si $f \in C^2(]-1,1[)$, alors $f''(0) = c$.	☐	☐
c) On a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = b$.	☐	☐
d) $f(x)^2 = b^2 x^2 + c^2 x^4 + x^6 \varepsilon(x)$.	☐	☐

Sol.:

a) VRAI.
Clairement $f(0) = 0$. Et comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ (donc fini), on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ si bien que f est continue en 0.

b) FAUX.
Si f est de classe $C^2(]-1,1[)$, le coefficient a_2 du développement limité de f autour de 0 est $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$ par la formule de Taylor. Comme $a_2 = c$ ici, il suit que $f''(0) = 2c$.

c) VRAI.
Par un calcul direct on a $\frac{f(x)}{x} = b + cx + x^3 \varepsilon(x)$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, le résultat en suit.

d) FAUX.
On calcule

$$f(x)^2 = \Big(bx + cx^2 + x^4\varepsilon(x)\Big)^2 = b^2x^2 + 2bcx^3 + c^2x^4 + 2bx^5\varepsilon(x) + 2cx^6\varepsilon(x)$$
$$= b^2x^2 + 2bcx^3 + c^2x^4 + x^5\varepsilon(x)$$

parce que $\lim_{x\to 0} 2(b+cx)\varepsilon(x) = 0$. *On voit que cette expression de* $f(x)^2$ *ne correspond pas à celle de l'énoncé rien qu'à cause du terme en* x^3. *Noter qu'on pourrait aussi choisir un contre-exemple explicite, par exemple* $f(x) = bx + cx^2 + x^5$.

Exercice 7. (Primitives)

Trouver des primitives pour les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sin(x)$ b) $f(x) = \cos(x)$ c) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

d) $f(x) = e^x$ e) $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ f) $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

g) $f(x) = \mathrm{Log}(x)$ h) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i) $f(x) = (ax+b)^s$ $(s \neq -1)$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$ k) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ l) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(x)}$ n) $f(x) = x\exp(x^2)$ o) $f(x) = (ax^p+b)^s x^{p-1}$ $(s \neq -1, \quad a, p \neq 0)$

Sol.:

Les primitives F *sont définies à une constante* $C \in \mathbb{R}$ *près.*

1. $F(x) = -\cos(x) + C$ *(cf. cours)*

2. $F(x) = \sin(x) + C$ *(cf. cours)*

3. $F(x) = -\mathrm{Log}(|\cos(x)|) + C$ *(cf. cours)*

4. $F(x) = e^x + C$ *(cf. cours)*

5. $F(x) = \int \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + C = \mathrm{ch}(x) + C$

6. $F(x) = \int \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + C = \mathrm{sh}(x) + C$

7. $F(x) = x\,(\mathrm{Log}(x) - 1) + C$ *(cf. cours)*

8. $F(x) = \mathrm{Log}(|x|) + C$ *(cf. cours)*

9. $F(x) = \int (ax+b)^s\,dx = \dfrac{1}{a}\int a(ax+b)^s\,dx = \dfrac{1}{a(s+1)}(ax+b)^{s+1} + C$ *car* $(ax+b)' = a$ *et donc* $F(x) = \dfrac{1}{a}\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt$ *avec* $f(t) = t^s$ *et* $t = \varphi(x) = ax+b$.

10. $F(x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx - \int \frac{-1}{1-x}\,dx = \mathrm{Log}(|1+x|) - \mathrm{Log}(|1-x|) + C = \mathrm{Log}\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$

11. $F(x) = \int \dfrac{1}{(1+x)(1-x)}\,dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\,dx = \dfrac{1}{2}\int \left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$$

12. $F(x) = -\int \dfrac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\operatorname{Log}(|1-x^2|) + C$ *car* $(1-x^2)' = -2x$ *(même idée qu'au ix)*

13. $F(x) = \int \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}\,dx = \int \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \operatorname{Log}(|\sin(x)|) + C$ *car* $\Big(\sin(x)\Big)' = \cos(x)$ *(même idée qu'au ix)*

14. $F(x) = \dfrac{1}{2}\int 2x\exp(x^2)\,dx = \dfrac{1}{2}\exp(x^2) + C$ *(même idée qu'au ix)*

15. $F(x) = \int (ax^p+b)^s\,x^{p-1}\,dx = \dfrac{1}{ap}\int ap\,x^{p-1}(ax^p+b)^s\,dx = \dfrac{1}{ap(s+1)}\,(ax^p+b)^{s+1} + C$

car $(ax^p+b)' = ap\,x^{p-1}$ *(même idée qu'au ix)*

Exercice 8. (Intégration immédiate)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x+1}\,dx$

Sol.: *Dans cette série, on va calculer ces intégrales en les ramenant à des intégrales standards. Avec l'avancement du cours vous verrez qu'on pourrait aussi utiliser d'autres méthodes d'intégration.*

a) On sépare la somme en deux termes

$$\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx = \int \left(\frac{3x}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^2}\right)dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 4\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\operatorname{Log}\Big(1+x^2\Big) + 4\operatorname{Arctg}(x) + C\,.$$

b) On utilise que la fonction à intégrer est une dérivée en chaîne

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} = -f\Big(\varphi(x)\Big)\cdot\varphi'(x) = -\Big(F\Big(\varphi(x)\Big)\Big)',$$

avec $\varphi(x) = \cos(x)$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ *et* $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2} - C$ *une primitive de* F. *Ainsi*

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx = -\left(-\frac{1}{2\cos(x)^2} - C\right) = \frac{1}{2\cos(x)^2} + C\,.$$

c) On remarque qu'il faut intégrer une composition avec une fonction affine, c.-à-d.

$$\frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}}\,.$$

Comme $\Big(\operatorname{Arcsin}(x)\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *la fonction* $\operatorname{Arcsin}(x) + C$ *est une primitive de* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et on obtient*

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C\,.$$

d) En utilisant la définition du sinus hyperbolique et une identité remarquable, on a

$$\int \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-(e^{-x})^2}{1+e^{-x}}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (1-e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}\Big(x + e^{-x}\Big) + C\,.$$

Exercice 9. (Révisions : suites définies par récurrence)

Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}\,.$$

a) Montrer que $2 \leq a_n \leq 3$ pour tout pour tout $n \geq 1$,

b) Montrer que (a_n) est décroissante,

c) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.

Sol.:

a) *On procède par récurrence. Pour $n = 1$, on a $2 \leq a_1 = \frac{5}{2} \leq 3$. Supposons alors que $2 \leq a_n \leq 3$. On a d'une part que*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} \leq \frac{3^2 + 6}{5} = 3\,,$$

et d'autre part que

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} \geq \frac{2^2 + 6}{5} = 2\,,$$

ce qui montre bien que $2 \leq a_{n+1} \leq 3$.

b) *On calcule*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 6}{5} - a_n = \tfrac{1}{5}(a_n^2 - 5a_n + 6) = \tfrac{1}{5}\underbrace{(a_n - 3)}_{\leq 0}\underbrace{(a_n - 2)}_{\geq 0} \leq 0\,,$$

donc (a_n) est décroissante.

c) *Étant minorée (par 2) et décroissante, (a_n) converge : $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. La valeur de ℓ peut être trouvée en prenant $n \to \infty$ des deux côtés de l'identité $a_{n+1} = \frac{a_n^2+6}{5}$. Comme $a_{n+1} \to \ell$ et $a_n^2 \to \ell^2$, ℓ doit satisfaire*

$$\ell = \frac{\ell^2 + 6}{5}\,.$$

Cette dernière a pour solutions $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 3$. Comme la suite est décroissante, on doit avoir $\ell \leq a_1 = \frac{5}{2}$, la limite est donc $\ell = \ell_1 = 2$.