



Ens. : Analyse I
Analyse I - MA
Automne 2022
Durée : 1 heures













Student One

(Corrigé commenté des questions ouvertes semaine II)

SCIPER: 111111

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

**Question 1:**

Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) := x e^{-x/5}$. Montrer qu'il existe $x_* > 0$ tel que $f(x_*) = 1$. On donnera une justification complète. Si des résultats du cours sont utilisés, on les énoncera.

① **Solution :** Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) := x e^{-x/5}$. Montrons qu'il existe $x_* > 0$ tel que $f(x_*) = 1$.

Rappelons d'abord le théorème de la valeur intermédiaire:

② **Théorème:** Soient $a < b$ et $f \in C^0([a, b])$. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

③ Pour montrer l'existence de x_* , on va vérifier que f satisfait les conditions du théorème avec deux valeurs a et b telles que $f(a) < 1 < f(b)$. La fonction f vaut 0 en 0 et $5 \cdot e > 1$ en 5. De plus, $f \in C^0([a, b])$.
Posons $a = 0$, $b = 5$ et $y = 1 \in [0, 5]$. On a bien $f(0) < 1 < f(5)$. On peut donc appliquer le théorème pour montrer qu'il existe $x_* \in [0, 5]$ tel que $f(x_*) = 1$. Précisons que $x_* \neq 0$ car $f(0) = 0$, donc $x_* \neq 0$. On a donc bien trouvé une valeur $x_* > 0$ telle que $f(x_*) = 1$.

① Pas nécessaire, mais bien pour se mettre en jambes

② Il s'agit d'une des formulations possibles du TVI

③ Ici il fallait chercher des points où f prend des valeurs < 1 (faute : $x=0$) et > 1 (un peu plus difficile, mais $x=5$ est un bon candidat car $f(5)$ s'estime facilement).



Question 2:

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

- (a) Montrez, en utilisant un ou des résultats du cours, que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0, 1[$.
- (b) Donnez un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0, 1[$.

Solution : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

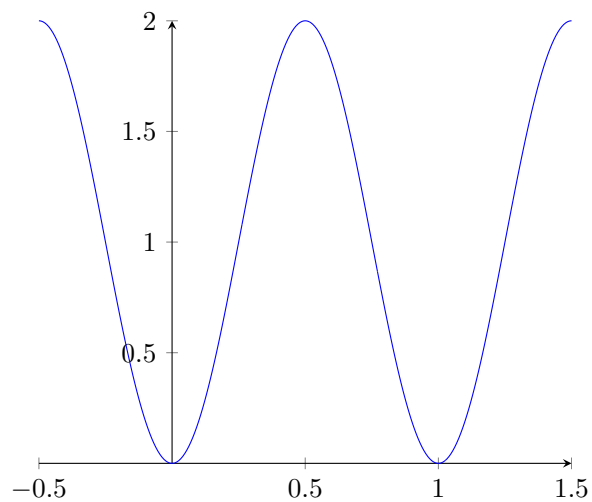
- (a) Montrons que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0, 1[$. Rappelons d'abord le théorème de Rolle:

Théorème: Soient $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Comme f est C^∞ et puisque $f(0) = f(1) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle pour montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$. On applique à nouveau le théorème de Rolle à la fonction f' (qui est aussi C^∞) sur les deux tronçons $[0, c]$ et $[c, 1]$. Puisque $f'(0) = f'(c) = 0$, il existe $a \in]0, c[$ tel que $f''(a) = 0$. De même, comme $f'(c) = f'(1) = 0$, il existe $b \in]c, 1[$ tel que $f''(b) = 0$. Comme $a < c < b$, on a bien trouvé $a \neq b$ sur $]0, 1[$ avec $f''(a) = f''(b) = 0$.

- (b) Pour donner un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus et où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0, 1[$, on cherche une fonction qui a deux minimums locaux (respectivement maximum locaux) en 0 et 1 et un maximum local (respectivement minimum local) entre les deux.

Par exemple, la fonction $f(x) = \sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + 1$ satisfait ces conditions.



Le graphe n'est pas nécessaire ici

La deuxième dérivée de $\sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) + 1$ est $4\cos(2\pi x)$, qui vaut 0 lorsque $x = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. Sur $[0, 1]$, on a exactement deux zéros, $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

D'autres exemples sont bien sûr possibles. Par exemple : $f(x) = \left[\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^2$
(un peu plus difficile à concevoir cependant).



Question 3:

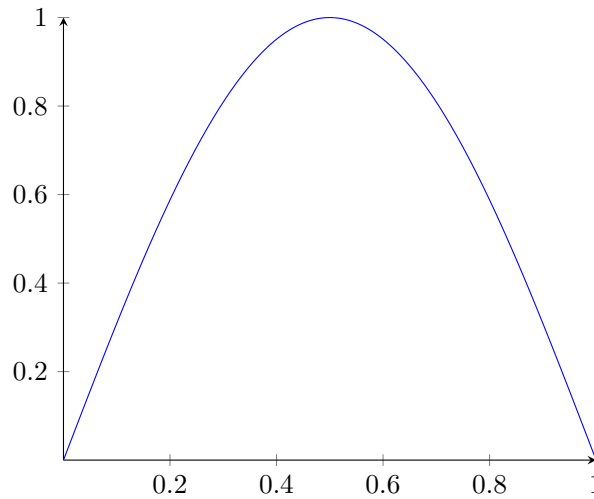
Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a un maximum local strict en $x \in]0, 1[$ s'il existe un $\alpha > 0$ tel que $f(y) < f(x)$ pour tout $y \in]0, 1[$ avec $0 < |y - x| < \alpha$.

- (a) Donnez un exemple de fonction continue explicite $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ qui a un maximum local strict.
- (b) Donnez un exemple de fonction continue explicite $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ qui a un nombre infini de maximums locaux stricts.

Solution : Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a un maximum local strict en $x \in]0, 1[$ s'il existe un $\alpha > 0$ tel que $f(y) < f(x)$ pour tout $y \in]0, 1[$ avec $0 < |y - x| < \alpha$.

(l'unicité n'était pas demandée)

- (a) On cherche une fonction continue $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ qui a un (unique) maximum local strict. Pour cela, on aimerait une fonction qui croît entre 0 et le maximum local, et décroît entre le maximum local et 1. Par exemple, la fonction $\sin(\pi x)$ admet un maximum local en $\frac{1}{2}$. En effet, on peut le vérifier avec la définition ci-dessus. Posons $\alpha = 0.5$ et soit $y \in]0, 1[$ tel que $|y - 0.5| < \alpha$, i.e., $y \in]0, 1[$. Alors $\sin(y) \leq \sin(0.5)$. *$\sin(\frac{\pi}{2})$*



- (b) Pour trouver un exemple de fonction continue $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ qui a un nombre infini de maximums locaux stricts, on doit chercher une fonction qui oscille un nombre infini de fois entre 0 et 1. Par exemple, la fonction $\sin(\frac{1}{x})$ possède un nombre infini de maximums locaux sur $]0, 1[$. En effet, $\sin(\frac{1}{x})$ est maximal si et seulement si

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{2}{\pi + 2\pi n}, n \in \mathbb{Z}.$$

← ce sont les maxima locaux de la fonction sin

Or, pour tout $n \geq 1$, $\frac{2}{\pi + 2\pi n} \in]0, 1[$. Il y a donc un nombre infini de maximums locaux.

