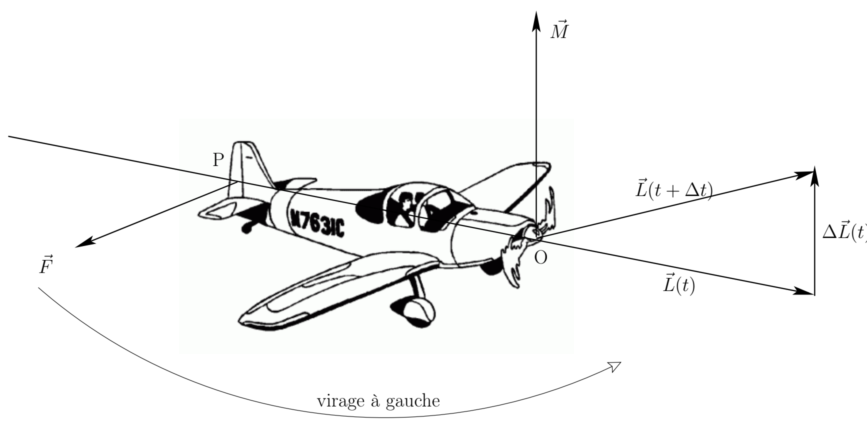
Corrigé Série 13 : Dynamique du solide

Questions conceptuelles

a) En vol horizontal, l'hélice a un moment cinétique $\vec{L}$ dirigé dans le sens du mouvement de l'avion (voir figure). Pour tourner à gauche, le pilote imprime à l'avion un mouvement de rotation. En manœuvrant la dérive, il applique une force $\vec{F}$ et celle-ci impose sur l'hélice un moment $\vec{M} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$, orienté vers le haut. D'après le théorème du moment cinétique $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, on détermine $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$. Ceci implique que la variation du moment cinétique $\Delta\vec{L}$ est colinéaire au moment exercé, et s'oriente vers le haut dans ce cas. Ainsi, si le pilote ne compense pas, l'avion aura tendance à monter lors d'un virage à gauche.



b) Lorsque la toupie est penchée, elle roule sur le sol. Les frottements au point de contact O induisent une force $\vec{F_c}$ qui s'oppose au mouvement de rotation (ralentissement de la rotation par dissipation d'énergie). La force $\vec{F_c}$ est donc dans le plan du sol, colinéaire au mouvement de translation de la toupie.

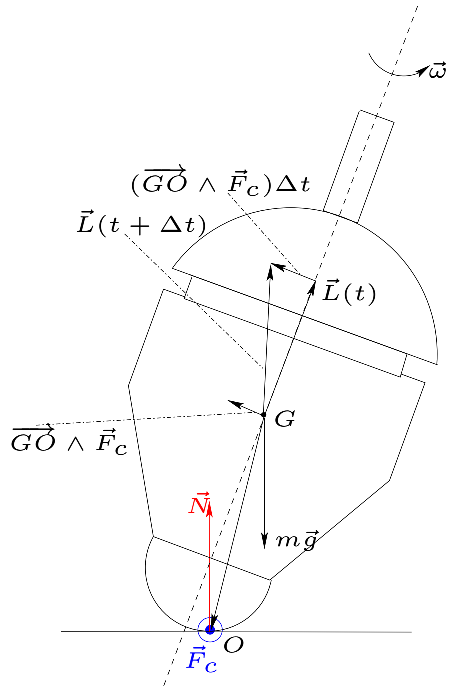
L'évolution du moment cinétique ($\vec{L} = I\vec{\omega}$) est donnée par le théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{F}_c + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{N} \ . \tag{1}$$

Le moment exercé par la pesanteur en G est nul car $\overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.

i) On observe que la variation du moment cinétique a une composante due au moment de la force de soutien $\vec{N}$. Ce moment est parallèle à $\vec{F_c}$ et est responsable de la précession de la toupie : l'axe de rotation de la toupie va tourner autour de la direction de la force $\vec{N}$.

ii) Une autre composante de la variation du moment cinétique est colinéaire au moment exercé par la force de frottement $\vec{F_c}$, et qui tend à aligner $\vec{L}$ avec la verticale : la toupie se redresse (voir figure). En position verticale, la toupie n'a plus de mouvement de translation (le centre de masse est devenu immobile). Les frottements n'exercent plus aucun moment en dehors de l'axe : l'orientation de $\vec{L}$ ne varie plus : la position est stable.



1 Equilibre stable

Pour des raisons de symétrie, le centre de masse G du solide se trouvera quelque part sur l'axe passant par le centre de la demi-boule et le sommet du cône, soit à l'intérieur du cône soit à l'intérieur de la demi-boule. Quand le solide est en position verticale, le moment de la force de pesanteur $\vec{P}$ par rapport à l'axe instantané de rotation (qui passe par le point de contact C) sera nul :

$$\vec{M}_C = \vec{CG} \wedge \vec{P} = \vec{0}\,. \tag{2}$$

On obtient ce résultat quelque soit la position du centre de masse sur l'axe du solide. La position verticale est donc une position d'équilibre (voir figure). Si le solide sort de cette position d'équilibre, le moment $\vec{M}_C$ sera orienté dans des directions opposées selon la position du centre de masse :

- Si le centre de masse du solide se trouve à l'intérieur de la demi-boule, $\overrightarrow{CG} \wedge \vec{P}$ "sort" du plan du dessin et le moment $\vec{M}_C$ redresse le solide.
- Si le centre de masse du solide se trouve à l'intérieur du cône, $\overrightarrow{CG} \wedge \vec{P}$ "rentre" dans le plan du dessin et le moment $\vec{M}_C$ fait tomber le solide.

On note que la force de soutient sur le système s'applique au point C et que son moment par rapport à ce point est nul ($\overrightarrow{CC} \wedge \vec{N} = \vec{0}$) ; Dans le cas limite où le centre de masse se trouverait en O, donc sur la surface de séparation entre le cône et la demi-boule, $\overrightarrow{M}_C$ est toujours nul. L'équilibre sera donc stable si le centre de masse du solide se trouve à l'intérieur de la demi-boule ou en O.

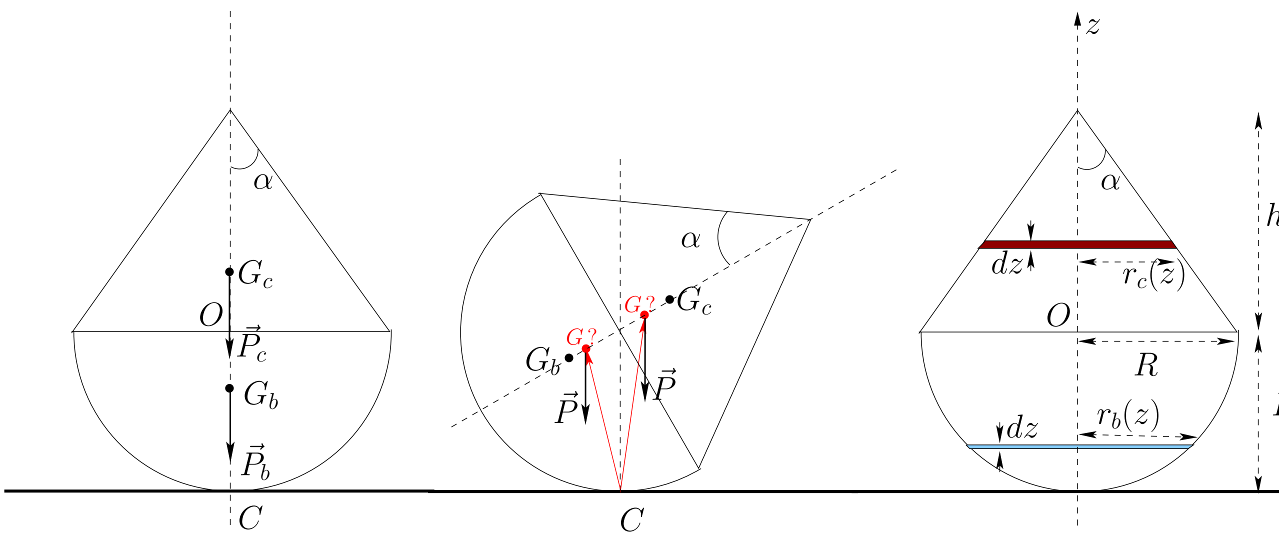
On a déjà remarqué que pour des raisons de symétrie, le centre de masse se trouvera quelque part sur l'axe vertical z. On peut donc se limiter à calculer la composante de $\vec{r}_G$ selon z :

$$z_G = \frac{1}{M}\int_{\text{solide}} z\,dm = \frac{1}{M_c+M_b}\left[\int_{\text{cône}} z\,dm + \int_{\text{demi-b.}} z\,dm\right] = \frac{1}{M_c+M_b}\left[M_c z_{G_c} + M_b z_{G_b}\right] \tag{3}$$

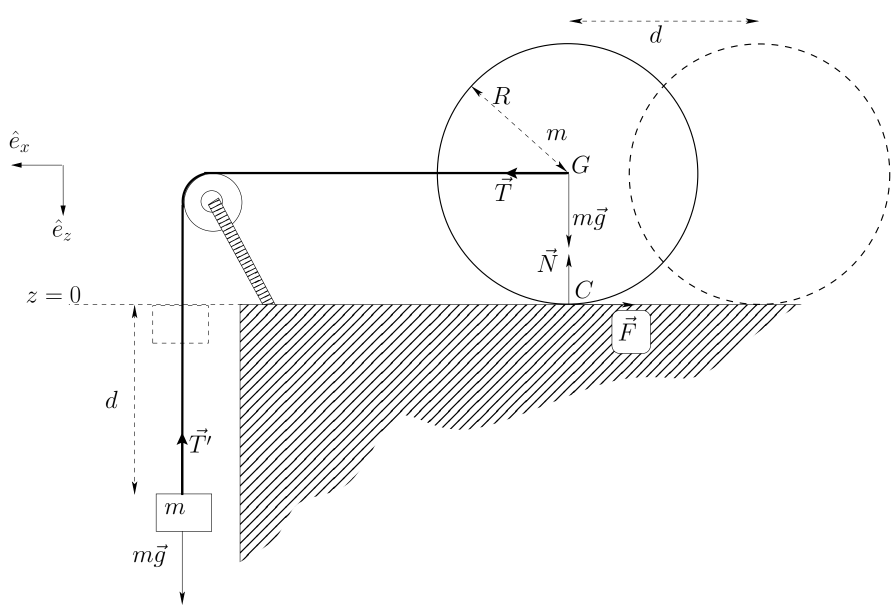
$$\Rightarrow z_G = \frac{1}{M_c + M_b}\left[\underbrace{\rho\frac{\pi h R^2}{3}}_{M_c}\frac{h}{4} - \underbrace{\rho\frac{2\pi R^3}{3}}_{M_b}\frac{3R}{8}\right] = \frac{1}{M_c+M_b}\left[\frac{\pi R^4\rho}{12\tan^2\alpha} - \frac{\pi R^4 \rho}{4}\right], \tag{4}$$

puisque $\tan\alpha = \frac{R}{h}$.
Pour que le centre de masse du solide se trouve à l'intérieur de la demi-boule ou en O, il faut que $z_G \leq 0$ et donc que la partie entre parenthèse dans l'équation (4) soit négative ou nulle :

$$\frac{\pi R^4\rho}{12\tan^2\alpha} - \frac{\pi R^4\rho}{4} \leq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{12\tan^2\alpha} \leq \frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \tan^2\alpha \geq \frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha \geq 30^{\circ}. \tag{5}$$



2 Roue tirée par un bloc



a) Les forces subies par la roue sont son poids $m\vec{g}$, la force $\vec{N}$ de soutien de la table, la force de frottement statique $\vec{F}$ (nécessaire au roulement sans glissement) et la force $\vec{T}$ exercée par le fil. Les forces subies par le bloc sont son poids $m\vec{g}$ et la force $\vec{T}'$ exercée par le fil. Le poids de la roue ne travaille pas car il est perpendiculaire au déplacement du centre de masse. Les forces $\vec{N}$ et $\vec{F}$ ne travaillent pas car elles s'appliquent sur le point C de la roue en contact avec la table et $\vec{v}_C = \vec{0}$ (roulement sans glissement). Les travaux des forces $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ sont opposés et se compensent donc. Le poids du bloc travaille, mais dérive de l'énergie potentielle $-mgz$ où z est un axe vertical vers le bas. Le système formé de la roue et du bloc est donc conservatif ; son énergie mécanique

$$E = E_{\text{cin,roue}} + E_{\text{cin,bloc}} - mgz \tag{6}$$

est conservée. Soit x un axe horizontal de la roue vers la poulie. Puisque le fil garde toujours la même longueur, la vitesse $\dot{x}$ du centre de masse G de la roue est égale à la vitesse $\dot{z}$ du bloc. La vitesse angulaire de rotation instantanée de la roue est égale à $\omega = \dot{x}/R$ (car $\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$). Le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de révolution vaut $I = \frac{1}{2}mR^2$. Ainsi :

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgz = \frac{5}{4}m\dot{x}^2 - mgz\,. \tag{7}$$

On n'a pas inclus le terme d'énergie potentielle de la roue dans l'expression ci-dessus, car le poids de la roue ne travaille pas (donc cette énergie potentielle est une constante qu'on peut arbitrairement mettre à zéro).

On place l'origine de l'axe z de telle sorte que $E = 0$ lorsque $\dot{x} = 0$ (situation initiale). Lorsque la roue a avancé d'une distance d, on a $z = d$ et la vitesse v du centre de masse de la roue doit satisfaire à

$$\frac{5}{4}mv^2 - mgd = 0 \tag{8}$$

pour conserver l'énergie. On a donc

$$v = 2\sqrt{\frac{gd}{5}}\,. \tag{9}$$

b) Pour que la roue ne glisse pas, il faut que la force de frottement statique ne dépasse pas sa valeur maximale,

$$F \leq \mu_\text{s} N = \mu_\text{s} mg\,, \tag{10}$$

c'est-à-dire que le coefficient de frottement statique doit être suffisamment grand :

$$\mu_\text{s} \geq \frac{F}{mg}\,. \tag{11}$$

Afin de déterminer F, on applique les lois fondamentales de la dynamique :

$$m\ddot{z} = mg - T' \quad : \quad \text{2ème loi de Newton appliquée au bloc,} \tag{12}$$

$$m\ddot{x} = T - F \quad : \quad \text{2ème loi de Newton appliquée à la roue,} \tag{13}$$

$$I\dot{\omega} = RF \quad : \quad \text{théorème du moment cinétique appliqué à la roue.} \tag{14}$$

Avec $\dot{z} = \dot{x}$, $\omega = \dot{x}/R$, $I = \frac{1}{2}mR^2$ et $T' = T$ (la tension du fil est partout la même), ce système d'équations devient

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - T \\ m\ddot{x} = T - F \\ m\ddot{x} = 2F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{2}{5}g \\ T = \frac{3}{5}mg \\ F = \frac{1}{5}mg\,. \end{cases} \tag{15}$$

Ainsi, on doit avoir

$$\mu_\text{s} \geq \frac{1}{5} = 0.2\,. \tag{16}$$