⚠ Dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, x et t sont des variables muettes.

8.3 Propriétés des intégrales définies

Convention : . Si $a = b$, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

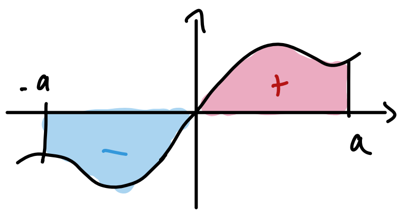
. Si $a > b$, $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

Soient $f, g \in C^0([a,b])$ avec $a < b$.

Propriété 1 : linéarité de l'intégrale. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

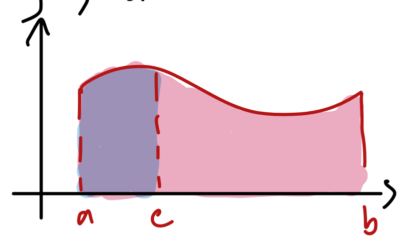
Propriété 2 : Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$



: les aires + et − s'annulent.

Propriété 3 : (Relation de Chasles). Si $c \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



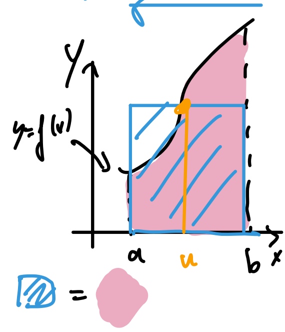
Propriété 4 (Monotonie de l'intégrale) :

Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

En particulier : $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ car $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$

fin cours 7/12

Propriété 5 :



$\boxed{\text{Thm. (Théorème de la moyenne). Soit } f \in C^0([a,b]) \text{, alors } \exists u \in]a,b[\text{ tel que } \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(u)}$

Rmq : $f(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est la moyenne de f sur $[a,b]$.

Thm (Théorème de la moyenne généralisé). Soit $f, g \in C^0([a,b])$ avec $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Alors $\exists u \in]a,b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(u)\int_a^b g(x)\,dx$$

Pour $g(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$, on retrouve le Thm. de la moyenne.

Preuve : Soit m et M le min et le max de f sur $[a,b]$. (propriétés des fonctions continues sur intervalle fermé borné)

Comme $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$,

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Par monotonie de l'intégrale :

$$\int_a^b m \cdot g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \leq \int_a^b M \cdot g(x)\,dx.$$

Par linéarité : $m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \leq M \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

Donc $\exists v \in [m, M]$ tel que $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = v\int_a^b g(x)\,dx$

Or par le Thm. des valeurs intermédiaires, $\exists u \in]a,b[$ tel que $f(u) = v$.
On conclut donc $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(u)\int_a^b g(x)\,dx$. ∎

8.4 Thm fondamental de l'analyse

Thm: Soit $f \in C^0([a,b])$, $a < b$. Alors :

(i) La fonction $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f, c'est-à-dire $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

(ii) Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f, alors on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(Ce Thm. fait le lien entre $\underbrace{\text{intégrales définies}}_{\text{aires sous une courbe}}$ et $\underbrace{\text{intégrales indéfinies}}_{\text{primitives}}$).

Preuve : (i) Soit $x \in]a,b[$ (pour $x=a$ ou $x=b$, faire le même raisonnement avec des limites à gauche ou à droite). On a :

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \qquad \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \qquad \text{(par Propriété 3 - Relation de Chasles)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h \cdot f(u_h)\right) \quad \text{avec } u_h \in]x, x+h[\text{ (Thm. de la valeur moyenne).}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(u_h)$$

$$= f(x) \quad \text{car } \lim_{h\to 0} u_h = x \text{ et } f \text{ est continue } \left(\lim_{h\to 0} f(u_h) = f\left(\lim_{h\to 0} u_h\right)\right)$$

(ii) Comme $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f (on vient de le montrer), $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + C$, $\forall x \in [a,b]$.

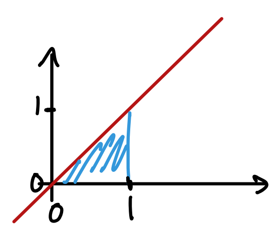
Que vaut C ?

- En a : $F(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C$ donc $C = F(a)$
- En b : $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C$ donc $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - C = F(b) - F(a)$. ∎

$\Rightarrow$ le calcul d'intégrales revient à la recherche de primitives.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b := F(b) - F(a)$$

Ex : $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \frac{1}{2}$



8.5 Méthodes d'intégration

8.5.1 Méthode directe

→ Reconnaître une primitive de la fonction à intégrer (cf. tableau).

Ex : 1) $\int_0^1 a^x \, dx = \int_0^1 \exp(x \log(a)) \, dx$ où $a > 0$ et $a \neq 1$ est un paramètre.

$$= \frac{1}{\log(a)} \int_0^1 \log(a) \cdot \exp(x \log(a)) \, dx$$

$$= \frac{1}{\log(a)} \Big[\exp(x \log(a)) \Big]_0^1 = \frac{1}{\log(a)} (a - 1) .$$

Détails : $\exp(x \log a) = f(g(x))$ avec $\begin{cases} g(x) = x \log a \\ f(y) = \exp(y). \end{cases}$

$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = (\log a) \cdot \exp(x \log a)$

2) $\int_0^{\pi/4} \tan(x) \, dx = - \int_0^{\pi/4} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \, dx$ on reconnaît $\frac{f'}{f} = (\log f)'$ avec $f = \cos$

$$= - \Big[\log \cos(x) \Big]_0^{\pi/4}$$

$$= - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-\log(1)) = \frac{1}{2} \log(2) .$$

3) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) \, dx$

$$= \Big[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

8.5.2 Changement de variable

Thm : Soit $f \in C^0(I)$, I intervalle et $[a,b] \subset I$.
Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ telle que $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ et $\begin{cases} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{cases}$.
Alors $$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt$$

Mnémotechnique : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \, dt \end{cases}$ + changer les bornes d'intégration.

Preuve : Soit F une primitive de f sur I et $G = F \circ \varphi$.
Pour $t \in [\alpha, \beta]$, on a :
$$G'(t) = \varphi'(t) \cdot F'(\varphi(t)) = \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t))$$
Donc
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta G'(t)\, dt = \left[G(t) \right]_\alpha^\beta$$
$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt. \quad \blacksquare$$

Exemple : $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

Posons $\begin{cases} x = \sin(u) \\ dx = \cos(u)\, du \end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(u)^2} \cos(u)\, du = \int_0^{\pi/2} \cos(u)^2\, du = \frac{\pi}{4}$$ (cf. calcul ci-dessus).

Pour les intégrales indéfinies (calcul de primitives) :

Thm : Soit I, J deux intervalles, $f \in C^0(I)$ et $\varphi : I \to J$, $\varphi \in C^1(I)$, et telle que φ est bijective. Soit G une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ alors $G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f sur I.

Preuve : Soit F une primitive de f sur I :
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du = G(\varphi^{-1}(x)) - \underbrace{G(\varphi^{-1}(a))}_{\text{constante que l'on peut ignorer.}}$$
$t = \varphi(u)$, $dt = \varphi'(u)\, du$

Exemple : $F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$, $x = \sin(u) = \varphi(u)$, $\varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

Une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \cos^2$ est : (cf ci-dessus)
$$G(u) = \int \cos^2(u)\, du = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2u))\, du$$
$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sin(u)\cos(u).$$
$(\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$ (trigo)$)$.

Donc $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\left(\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}\right)$$

8.5.3 Intégration par parties

Thm. Soit $f, g \in C^1([a,b])$ alors :

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Preuve : $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Donc $$\int_a^b (f\cdot g)'(x)\, dx = \begin{cases} \left[f(x)\, g(x)\right]_a^b \\ \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \end{cases}$$

$\blacksquare$

fin cours 11/12