Analyse I – Série 13

Echauffement. (Formules d'intégration)

a) Retrouver la formule du changement de variable à partir de la dérivée dérivée d'une composition de fonctions.
b) Retrouver la formule d'intégration par parties à partir de la dérivée d'un produit de fonctions.

Exercice 1. (Intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)\, dx$ b) $(*) \displaystyle\int e^{ax} \cos(bx)\, dx \qquad (a \neq 0)$

Indication : la question b) est plus difficile. En appelant $I_{a,b}$ l'intégrale en question, on cherchera à trouver une équation satisfaite par $I_{a,b}$ en intégrant deux fois par parties (ce qui fera réapparaître $I_{a,b}$).

Exercice 2. (Intégrales récurrentes)

Trouver une formule de récurrence pour les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

a) $I_n(x) = \displaystyle\int x^n \sin(2x)\, dx$ b) $I_n(x) = \displaystyle\int \mathrm{Log}(x)^n\, dx$

Exercice 3. (Changement de variable)

Trouver des primitives pour les fonctions f données ci-dessous en utilisant le changement de variable $x = \varphi(u)$ indiqué :

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad x = \sin(u)$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,, \qquad x = \mathrm{tg}(u)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}\,, \qquad x = \mathrm{Log}(t)$ d) $f(x) = x\sqrt{x-1}\,, \qquad x = t^2+1$

Exercice 4. (Changement de variable)

Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^5\, dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx$ c) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\, dx$

Indication : pour a), on peut utiliser $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ puis le changement de variable $t = \varphi(x) = \cos(x)$. Pour b) on peut poser $x = \varphi(u) = u^2 - 1$. Pour c) on peut poser $x = \varphi(u) = u^2$.

Exercice 5. (Intégrale définie)

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\, \cos(x^{33})\, x^{32}\, dx\,.$$

Exercice 6. (Intégration de développements limités)

Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

a) $f(x) = \int_0^x \mathrm{Log}(1+t^2)\,dt$ b) $f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin(t)}\,dt$

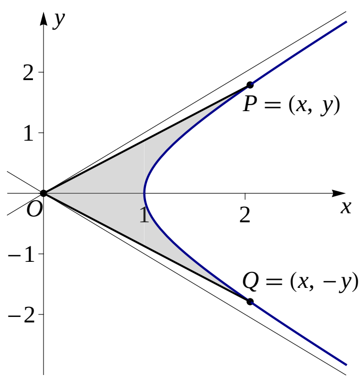
Exercice 7. (Fonctions rationnelles)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,dx$ b) $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx$ c) $\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx$ d) $\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx$

Exercice 8.(*) (Fonctions hyperboliques)

Soient $P=(x,y)$ et $Q=(x,-y)$ des points de l'hyperbole $x^2-y^2=1$ $(x \geq 1)$ et t l'aire de la région comprise entre l'hyperbole et les rayons OP et OQ (aire grise sur la figure ci-contre). Montrer que $x=\mathrm{ch}(t)$ et $y=\mathrm{sh}(t)$.



Exercice 9. (V/F : Intégration)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non-vide et borné et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

	V	F
a) f admet une primitive sur I.	☐	☐

Dans la suite on restreint le domaine de f à l'intervalle $[a,b] \subset I$ où $a,b \in I$ tels que $a<b$.

	V	F
b) Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f admet un zéro en $[a,b]$.	☐	☐
c) Si $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.	☐	☐
d) Si $f(x)<0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx < 0$.	☐	☐

Soit encore F une primitive de f sur $[a,b]$.

	V	F
e) Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $F(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.	☐	☐
f) Pour tout $x \in [a,b]$, on a $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.	☐	☐