

---

## Analyse I – Série 13

**Echauffement.** (Formules d'intégration)

- a) Retrouver la formule du changement de variable à partir de la dérivée d'une composition de fonctions.
- b) Retrouver la formule d'intégration par parties à partir de la dérivée d'un produit de fonctions.

**Sol.:**

a) La formule pour la dérivée de la fonction composée  $g \circ f$  est

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

En prenant l'intégrale des deux côtés on obtient

$$\int (g \circ f)'(x) dx = \int g'(f(x))f'(x) dx.$$

Comme  $g \circ f$  est une primitive de  $(g \circ f)'$ , on a

$$(g \circ f)(x) + C = \int g'(f(x))f'(x) dx.$$

Puisque la notation de l'intégrale indéfinie vue au cours désigne l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction, la constante  $C$  peut être absorbée dans la notation de l'intégrale indéfinie à droite, d'où la formule voulue

$$g(f(x)) = \int g'(f(x))f'(x) dx.$$

b) La dérivée du produit des fonctions  $f$  et  $g$  s'écrit

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En prenant l'intégrale des deux côtés on obtient

$$\int (f(x)g(x))' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

Le côté gauche vaut  $f(x)g(x) + C$  si bien qu'on trouve la formule d'intégration par parties en absorbant de nouveau la constante dans une des deux autres intégrales indéfinies :

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

**Exercice 1.** (Intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int x^2 \cos(x) dx \qquad \text{b) } (*) \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad (a \neq 0)$$

*Indication* : la question b) est plus difficile. En appelant  $I_{a,b}$  l'intégrale en question, on cherchera à trouver une équation satisfaite par  $I_{a,b}$  en intégrant deux fois par parties (ce qui fera réapparaître  $I_{a,b}$ ).

**Sol.:**

a) Par intégration par parties d'abord avec  $f'(x) = \cos(x) [\Rightarrow f(x) = \sin(x)]$ ,  $g(x) = x^2 [\Rightarrow g'(x) = 2x]$  et puis avec  $f'(x) = \sin(x) [\Rightarrow f(x) = -\cos(x)]$ ,  $g(x) = x [\Rightarrow g'(x) = 1]$ , il vient

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x) dx &= \sin(x) x^2 - 2 \int \sin(x) x dx = \sin(x) x^2 - 2 \left( -\cos(x) x + \int \cos(x) dx \right) \\ &= (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + C \end{aligned}$$

b) Posons  $I_{a,b} = \int e^{ax} \cos(bx) dx$  et intégrons deux fois par parties avec  $f'(x) = e^{ax} [\Rightarrow f(x) = \frac{1}{a} e^{ax}]$  ainsi que  $g(x) = \cos(bx) [\Rightarrow g'(x) = -b \sin(bx)]$  :

$$I_{a,b} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx$$

Cette dernière intégrale doit aussi être intégrée par parties avec  $f(x) = e^{ax}$  et  $g(x) = \sin(bx) [\Rightarrow g'(x) = b \cos(bx)]$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx$$

On remarque alors que l'intégrale à droite est  $I_{a,b}$ . Ainsi on peut combiner les deux équations précédentes et isoler  $I_{a,b}$ . On obtient

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left( \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I_{a,b} \right) \\ &\Leftrightarrow \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a} \left( \cos(bx) + \frac{b}{a} \sin(bx) \right) \end{aligned}$$

et donc

$$I_{a,b} = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left( a \cos(bx) + b \sin(bx) \right) + C, \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

**Exercice 2.** (Intégrales récurrentes)

Trouver une formule de récurrence pour les intégrales suivantes ( $n \in \mathbb{N}$ ) :

$$\text{a) } I_n(x) = \int x^n \sin(2x) dx \qquad \text{b) } I_n(x) = \int \text{Log}(x)^n dx$$

**Sol.:**

1. On a  $I_0 = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C$ , et

$$I_1 = -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \quad (\text{par parties avec } f'(x) = \sin(2x) \text{ et } g(x) = x)$$

et si  $n \geq 2$  (encore deux fois par parties),

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n \sin(2x) dx \stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{2}x^n \cos(2x) + \frac{1}{2}n \int x^{n-1} \cos(2x) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{2}x^n \cos(2x) + \frac{n}{2} \left[ \frac{1}{2}x^{n-1} \sin(2x) - \frac{1}{2}(n-1) \int x^{n-2} \sin(2x) dx \right] \\ &= \frac{x^{n-1}}{4} (n \sin(2x) - 2x \cos(2x)) - \frac{n(n-1)}{4} I_{n-2}, \end{aligned}$$

où (1):  $f'(x) = \sin(2x)$  et  $g(x) = x^n$  et (2):  $f'(x) = \cos(2x)$  et  $g(x) = x^{n-1}$ .

2. Posons  $I_n = \int \text{Log}(x)^n dx$ . Alors  $I_0 = x + C$ . Pour  $n \geq 1$  on intègre par parties avec  $f'(x) = 1$  et  $g(x) = \text{Log}(x)^n$  :

$$I_n = \int 1 \cdot \text{Log}(x)^n dx = x \text{Log}(x)^n - n \int x \text{Log}(x)^{n-1} \frac{1}{x} dx = x \text{Log}(x)^n - n I_{n-1}.$$

### Exercice 3. (Changement de variable)

Trouver des primitives pour les fonctions  $f$  données ci-dessous en utilisant le changement de variable  $x = \varphi(u)$  indiqué :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x = \sin(u) \\ \text{b) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}, & x = \text{tg}(u) \\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{e^x+1}, & x = \text{Log}(t) \\ \text{d) } f(x) = x\sqrt{x-1}, & x = t^2+1 \end{array}$$

**Sol.:** La formule pour le changement de variable  $x = \varphi(u)$  est  $\int f(x) dx = \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ .

a) Pour  $x = \varphi(u) = \sin(u)$  on a  $f(\varphi(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \frac{1}{\cos(u)}$  et  $\varphi'(u) = \cos(u)$ . Ainsi

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)} du = \int du = u + C = \text{Arcsin}(x) + C,$$

où on a utilisé que  $u = \varphi^{-1}(x) = \text{Arcsin}(x)$ .

b) Pour  $x = \varphi(u) = \text{tg}(u)$  on a  $f(\varphi(u)) = \frac{1}{1+\text{tg}^2(u)} = \frac{\cos^2(u)}{\cos^2(u)+\sin^2(u)} = \cos^2(u)$  et  $\varphi'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$ . Ainsi

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{\cos^2(u)}{\cos^2(u)} du = \int du = u + C = \text{Arctg}(x) + C,$$

où on a utilisé que  $u = \varphi^{-1}(x) = \text{Arctg}(x)$ .

c) Pour  $x = \varphi(t) = \text{Log}(t)$  on a  $f(\varphi(t)) = \frac{1}{e^{\text{Log}(t)}+1} = \frac{1}{1+t}$  et  $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x+1} dx &= \int \frac{1}{t(1+t)} dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = \text{Log}(t) - \text{Log}(t+1) + C \\ &= \text{Log}\left(1 - \frac{1}{t+1}\right) + C = \text{Log}\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right) + C = -\text{Log}\left(1 + e^{-x}\right) + C. \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $t = \varphi^{-1}(x) = e^x$ .

d) Pour  $x = \varphi(t) = t^2 + 1$  on a  $f(\varphi(t)) = (t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1 - 1} = t(t^2 + 1)$  et  $\varphi'(t) = 2t$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1} dx &= \int 2t^2(t^2 + 1) dt = \int 2t^4 + 2t^2 dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C \\ &= \frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ .

#### Exercice 4. (Changement de variable)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$\text{a) } \int_0^{\pi/2} \sin(x)^5 dx \qquad \text{b) } \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx \qquad \text{c) } \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) dx$$

Indication : pour a), on peut utiliser  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$  puis le changement de variable  $t = \varphi(x) = \cos(x)$ . Pour b) on peut poser  $x = \varphi(u) = u^2 - 1$ . Pour c) on peut poser  $x = \varphi(u) = u^2$ .

**Sol.:**

a) En utilisant que  $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ , on observe que

$$\sin(x)^5 = (1 - \cos(x)^2)^2 \sin(x) = -f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

avec  $t = \varphi(x) = \cos(x)$  et  $f(t) = (1 - t^2)^2$ .

Comme les bornes de  $x$  sont  $\alpha = 0$  et  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , les bornes de  $t$  sont  $a = \varphi(\alpha) = 1$  et  $b = \varphi(\beta) = 0$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(x)^2)^2 \sin(x) dx &= - \int_1^0 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ &= \left[ t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

b) On pose  $x = \varphi(u) = u^2 - 1$ ,  $\varphi'(u) = 2u$ . Comme  $x$  varie entre  $a = 2 = \varphi(\sqrt{3})$  et  $b = 3 = \varphi(2)$ , les bornes de  $u$  sont  $\alpha = \sqrt{3}$  et  $\beta = 2$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u^2}{u^2 - 1} du = 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \left( 1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du \\ &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{u+1 - (u-1)}{(u+1)(u-1)} du \\ &= 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u-1} du - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{u+1} du \\ &= \left[ 2u + \text{Log}\left(\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) \right]_{\sqrt{3}}^2 = 4 - 2\sqrt{3} + \text{Log}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)}\right). \end{aligned}$$

c) Le changement de variable à poser est  $x = \varphi(u) = u^2$ ,  $\varphi'(u) = 2u$ . Comme  $x$  varie entre  $a = \frac{\pi^2}{16} = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et  $b = \frac{\pi^2}{9} = \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , les bornes de  $u$  sont  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et  $\beta = \frac{\pi}{3}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} u \cos(u) du \stackrel{(*)}{=} 2 \left[ u \sin(u) \right]_{\pi/4}^{\pi/3} - 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin(u) du \\ &= 2 \left[ u \sin(u) + \cos(u) \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

où on a intégré (\*) par parties avec  $f'(u) = \cos(u)$ ,  $g(u) = u$ .

**Exercice 5.** (Intégrale définie)

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33})) \cos(x^{33}) x^{32} dx .$$

**Sol.:** La formule du changement de variable pour  $x = \varphi(u)$  avec  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  est

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \quad \text{avec} \quad \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b .$$

On pose alors le changement de variable  $x = \varphi(u) = u^{1/33}$ . Ainsi on a  $a = 0 = \varphi(\alpha)$  et  $b = \pi^{1/33} = \varphi(\beta)$  si bien que les nouvelles bornes de l'intégrale par rapport à  $u$  sont  $\alpha = 0$  et  $\beta = \pi$ .

Comme

$$\varphi'(u) = \frac{1}{33} u^{1/33-1} ,$$

on a

$$\varphi(u)^{32} \varphi'(u) = u^{32/33} \cdot \frac{1}{33} u^{1/33-1} = \frac{1}{33}$$

et l'expression à intégrer en  $u$  est

$$\sin(\sin(\varphi(u)^{33})) \cos(\varphi(u)^{33}) \varphi(u)^{32} \varphi'(u) = \frac{1}{33} \sin(\sin(u)) \cos(u) .$$

L'intégrale est alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33})) \cos(x^{33}) x^{32} dx &= \frac{1}{33} \int_0^\pi \sin(\sin(u)) \cos(u) du \\ &= \frac{1}{33} \left[ -\cos(\sin(u)) \right]_0^\pi \quad \text{car} \quad (\sin(u))' = \cos(u) \\ &= \frac{1}{33} \left( -\cos(\sin(\pi)) + \cos(\sin(0)) \right) \\ &= \frac{1}{33} (-\cos(0) + \cos(0)) = 0 . \end{aligned}$$

**Exercice 6.** (Intégration de développements limités)Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 de la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\text{a) } f(x) = \int_0^x \text{Log}(1+t^2) dt \qquad \text{b) } f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin(t)} dt$$

**Sol.:**

a) Par le théorème fondamental du calcul intégral on a  $f'(x) = \text{Log}(1+x^2)$ . On va donc trouver le développement limité d'ordre 6 de  $f'$  autour de 0 et ensuite intégrer comme vu durant le cours. Puisque

$$\text{Log}(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + x^6\varepsilon(x) ,$$

on obtient en intégrant

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{21}x^7 + x^7\varepsilon(x) .$$

Pour l'intégration du reste  $x^7\varepsilon(x)$ , il faut utiliser le théorème de la moyenne (cf. démonstration vue au cours).

b) On commence par écrire  $f$  comme composée de deux fonctions :

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin(t)} dt = (h \circ g)(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad h(u) = \int_0^u e^{\sin(t)} dt.$$

Pour calculer le développement limité d'ordre 7 (ou 8) de  $f$ , il suffit donc de calculer le développement limité d'ordre 4 de  $h$  ou, par le théorème fondamental du calcul intégral, le développement limité d'ordre 3 de  $e^{\sin(t)}$ . On a

$$\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t).$$

Il faut substituer ce développement limité dans celui de la fonction  $e^s$  autour de  $\sin(0) = 0$ , c'est-à-dire dans

$$e^s = 1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + s^3\varepsilon(s).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} e^{\sin(t)} &= 1 + \left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)^2 + \frac{1}{6} \left(t - \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)\right)^3 + t^3\varepsilon(t) \\ &= 1 + \left(t - \frac{1}{6}t^3\right) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t) \\ &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon(t). \end{aligned}$$

En intégrant on trouve le développement limité de la fonction  $h$  autour de  $u = 0$ ,

$$h(u) = \int_0^u \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon(t)\right) dt = u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + u^4\varepsilon(u),$$

et donc

$$f(x) = h(x^2) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + x^8\varepsilon(x).$$

**Exercice 7.** (Fonctions rationnelles)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$\text{a) } \int \frac{x-2}{x(x+1)^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{c) } \int \frac{x^2-2}{x^3-x^2} dx \quad \text{d) } \int \frac{4x}{x^4-1} dx$$

**Sol.:** Pour intégrer des fractions polynomiales du type i), ii) et iii), la méthode des éléments simples est particulièrement adaptée.

a) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x-2}{x(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}, \quad \text{avec} \quad \alpha = -2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3.$$

Ainsi

$$\int \frac{x-2}{x(x+1)^2} dx = \int \left( -\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx = -2 \operatorname{Log} |x| + 2 \operatorname{Log} |x+1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

b) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{\alpha x + \beta}{1+x^2} + \frac{\gamma x + \delta}{(1+x^2)^2}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx = \int \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{-x}{(1+x^2)^2} \right) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

c) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{x^2-2}{x^3-x^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -1.$$

On obtient donc

$$\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2} dx = \int \left( \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = 2 \operatorname{Log}(|x|) - \operatorname{Log}(|x-1|) - \frac{2}{x} + C.$$

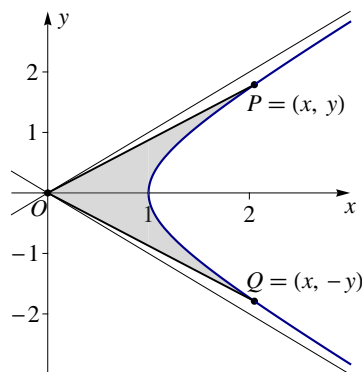
d) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2+1}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2, \quad \delta = 0,$$

d'où

$$\int \frac{4x}{x^4-1} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \operatorname{Log} \left( \frac{|x^2-1|}{x^2+1} \right) + C.$$

**Exercice 8.** (Fonctions hyperboliques)Soient  $P = (x, y)$  et  $Q = (x, -y)$  des points de l'hyperbole  $x^2 - y^2 = 1$  ( $x \geq 1$ ) et  $t$  l'aire de la région comprise entre l'hyperbole et les rayons  $OP$  et  $OQ$  (aire grise sur la figure ci-contre). Montrer que  $x = \operatorname{ch}(t)$  et  $y = \operatorname{sh}(t)$ .



**Sol.:** Soit la fonction  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ . L'aire cherchée est alors

$$t = xy - 2 \int_1^x f(w) dw = xy - 2 \int_1^x \sqrt{w^2 - 1} dw .$$

On pose  $w = \varphi(u) = \text{ch}(u)$ . Ainsi  $\varphi'(u) = \text{sh}(u)$  et  $u$  varie entre 0 et  $a := \text{Arccosh}(x)$  car  $\varphi(0) = 1$  et  $\varphi(a) = x$ . L'intégrale devient

$$2 \int_1^x \sqrt{w^2 - 1} dw = 2 \int_0^a \sqrt{\text{ch}(u)^2 - 1} \cdot \text{sh}(u) du = 2 \int_0^a \text{sh}(u)^2 du =: I .$$

Pour calculer  $I$ , on intègre par parties avec  $f'(u) = g(u) = \text{sh}(u)$  :

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^a \text{sh}(u)^2 du = 2 \left[ \text{ch}(u) \text{sh}(u) \right]_0^a - 2 \int_0^a \underbrace{\text{ch}(u)^2}_{=1+\text{sh}(u)^2} du \\ &= 2 \text{ch}(a) \text{sh}(a) - 2 \int_0^a 1 du - I . \end{aligned}$$

Il suit que

$$I = \text{ch}(a) \text{sh}(a) - a = x \underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{=y} - \text{ch}(x) = xy - \text{Arccosh}(x) .$$

Ainsi  $t = xy - I = \text{Arccosh}(x)$  et donc  $x = \text{ch}(t)$ ,  $y = \sqrt{x^2 - 1} = \text{sh}(t)$ .

### Exercice 9. (V/F : Intégration)

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert non-vide et borné et soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

a)  $f$  admet une primitive sur  $I$ .

V F

Dans la suite on restreint le domaine de  $f$  à l'intervalle  $[a, b] \subset I$  où  $a, b \in I$  tels que  $a < b$ .

b) Si  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , alors  $f$  admet un zéro en  $[a, b]$ .

c) Si  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ , alors  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

d) Si  $f(x) < 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx < 0$ .

Soit encore  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

e) Si  $f(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ , alors  $F(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

f) Pour tout  $x \in [a, b]$ , on a  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .



**Sol.:**

a) **VRAI.**

Soit  $a \in I$  (donc  $a$  n'est pas une borne de  $I$ ). On va montrer que pour tout  $x \in I$ , la fonction  $F$  définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de  $f$  en vérifiant que  $F'(x) = f(x)$  à l'aide de la définition de la dérivée. En effet, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Noter que la dernière égalité reste vraie pour  $h < 0$  car  $\int_x^{x+h} f(t) dt = -\int_{x+h}^x f(t) dt$ . Par le théorème de la moyenne ( $f$  est continue sur l'intervalle  $[x, x+h] \subset I$  si  $h > 0$  ou  $[x+h, x] \subset I$  si  $h < 0$ ), il suit que  $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(u_h)h$  pour un  $u_h \in ]x, x+h[$  si  $h > 0$  ou  $u_h \in ]x+h, x[$  si  $h < 0$ . Ainsi on a

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h f(u_h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(u_h) = f(x)$$

parce que  $u_h \rightarrow x$  quand  $h \rightarrow 0$  et que  $f$  est continue sur  $I$ .

b) **VRAI.**

Par le théorème de la moyenne, il existe  $u \in ]a, b[$  tel que  $0 = \int_a^b f(x) dx = f(u)(b-a)$ . Comme  $b > a$ , on doit avoir  $f(u) = 0$ .

c) **FAUX.**

Prendre par exemple  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[-1, 2]$ . Alors  $\int_{-1}^2 f(x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{3}{2} \geq 0$  mais  $f(-1) = -1 < 0$ .

d) **VRAI.**

Par le théorème de la moyenne, il existe  $u \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^b f(x) dx = f(u)(b-a)$ . Comme on a  $f(u) < 0$  et que  $b > a$ , le résultat suit.

e) **FAUX.**

Prendre par exemple  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[-2, -1]$ . Ainsi  $f(x) \leq 0$  sur  $[-2, -1]$  mais  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 > 0$  pour tout  $x \in [-2, -1]$ .

f) **FAUX.**

Considérer par exemple la fonction constante  $f(x) = 1$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Alors  $F(x) = x + 1$  est une primitive de  $f$  mais

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x 1 dt = x - 0 = x \neq x + 1 = F(x).$$