EPFL

Prof. L. Chizat
Analyse I - (n/a)
16 janvier 2023
3h30

n/a

n/a

SCIPER : **999999** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages (les dernières pouvant être vides), et 31 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`SCQ-induction-A`] : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

☐ Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.

☐ Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.

☐ Si $a_0 < 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

■ Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.

Question [`SCQ-inf-sup-A`] : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors :

■ $\operatorname{Sup}(A \cup B) = \max\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$

☐ $\operatorname{Sup}(A \cup B) = (\operatorname{Sup} A) \cdot (\operatorname{Sup} B)$

☐ $\operatorname{Sup}(A \cup B) = (\operatorname{Sup} A) + (\operatorname{Sup} B)$

☐ $\operatorname{Sup}(A \cup B) = \min\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$

Question [`SCQ-complexes-B`] : Les nombres complexes $3, 1 - 2i$, et $1 + 2i$ sont les racines du polynôme

■ $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$

☐ $z^3 + 14z^2 + 15$

☐ $z^3 - 2iz^2 + 45$

☐ $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

Question [`SCQ-suites-convergence-B`] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = (3n+1)^{\operatorname{Log}(\frac{1}{\sqrt{n}})}$. Alors :

■ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Question [`SCQ-suites-recurrence-A`] : Soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 1$ par $a_n = 3 - \dfrac{2}{a_{n-1}}$. Alors :

■ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

☐ la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$

☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$

Catalogue

Question [SCQ-serie-B] : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \dfrac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

■ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument

□ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument

□ $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$

□ $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$

Question [SCQ-limsup-liminf-A] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{6n+8}{2n}\right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Alors :

■ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -6$ et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$

□ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -14$ et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$

□ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -3$ et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0$

□ $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -6$ et $\limsup_{n\to+\infty} a_n = 6$

Question [SCQ-serie-parametre-B] : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

■ $\alpha < 0$ □ $-1 < \alpha < 0$ □ $\alpha < -1$ □ $\alpha \geq 0$

Question [SCQ-limite-prolongmt-B] : Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x \leq 0\,, \\ \sin(ax+b) & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ pour :

■ $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{4}$ □ $a = 0$ et $b = -\frac{\pi}{4}$

□ $a = -\frac{\pi}{4}$ et $b = 0$ □ $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{2}$

Catalogue

Question [SCQ-val-intermed-image-interv-B] : Soit $f\colon \left[\frac{1}{2},1\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Soit I l'ensemble image de f. Alors :

- ■ $I = [1,2]$
- □ $I = [2,3]$
- □ $I = \left[1, 1+\frac{1}{\pi}\right]$
- □ $I = \left[1-\frac{1}{\pi}, 1\right]$

Question [SCQ-cont-vs-derivab-B] :
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2/|x|} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- □ $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas
- □ $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe mais f n'est pas continue en $x = 0$
- ■ f est dérivable en $x = 0$
- □ f est continue mais pas dérivable en $x = 0$

Question [SCQ-contin-deriv-C1-A] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \geq -1\,, \\ \frac{1}{2}(x^2+1) & \text{si } x < -1\,. \end{cases}$$

Alors :

- ■ f est dérivable en $x = -1$ et continue en $x = 0$
- □ f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- □ f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = -1$
- □ f n'est pas continue en $x = -1$

Question [SCQ-theo-accr-finis-A] : Soit $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \cos(2x)$. Alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a :

- ■ $-2 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$
- □ $-\pi \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq -1$
- □ $-1 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 1$
- □ $0 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 2$

Catalogue

Question [`SCQ-dev-limite-A`] **:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \operatorname{Log}(1+x)$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

■ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

□ $f(x) = x - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

□ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

□ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

Question [`SCQ-serie-entiere-A`] **:** Soit $a_n = 1$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair. Le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

■ vaut 1

□ est infini

□ vaut 0

□ vaut $\frac{1}{2}$

Question [`SCQ-integrale-first-A`] **:** L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ vaut

■ $2 - \dfrac{5}{e}$

□ $2 - \dfrac{1}{e}$

□ $2 - \dfrac{3}{e}$

□ $2 - \dfrac{4}{e}$

Question [`SCQ-integrale-first-B`] **:** L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-3)\,(x+2)}\,\mathrm{d}x$ vaut

■ 0

□ $\operatorname{Log}(3) - \operatorname{Log}(2)$

□ -1

□ $\sqrt{6}\ \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{6}\right)$

Question [`SCQ-int-generalisee-B`] **:** L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{\operatorname{Log}(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

■ diverge

□ converge et vaut $+1$

□ converge et vaut -1

□ converge et vaut -4

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [TF-inf-sup-B] : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés. Si $\operatorname{Inf} A \leq \operatorname{Inf} B$ et $\operatorname{Sup} A \geq \operatorname{Sup} B$, alors $B \subset A$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-complexes-A] : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, alors $z^5 + \dfrac{1}{z^5}$ est un nombre réel.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-induction-suites-limites-A] : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-serie-B] : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent. Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-fonction-etc-A] : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Alors la fonction réciproque $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-limites-continuite-B] : Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'ensemble image est $[0,1]$. Alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) - x = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-derivabilite-discussion-A] : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $x_0 = 0$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

Catalogue

Question [TF-serie-entiere-B] : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f possède un développement limité d'ordre n autour de x_0.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-dev-limite-B] : Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe des nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} = 0$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-integrale-A] : L'intégrale $\int_{-1}^{1} e^{-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ vaut zéro.

☐ VRAI ■ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 *Réservé au correcteur*

Soit $a > 0$, $I =]-a, a[$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^1(I)$.

(a) Montrer que si f' est impaire, alors $\int_0^x f'(t)dt = \int_0^{-x} f'(t)dt$ pour tout $x \in I$.

(b) En déduire que si f' est impaire alors f est paire.

Question 30: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■ 8	*Réservé au correcteur*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = xe^x - e^x.$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout $k \geq 1$,

$$f^{(k)}(x) = (k-1)e^x + xe^x.$$

(b) Donner, sans justifier, la série de Taylor de f autour de $x_0 = 1$.

(c) Trouver, en justifiant, le rayon de convergence de cette série de Taylor. (Remarque: on ne demande pas de vérifier que f coïncide avec sa série de Taylor sur son intervalle de convergence.)

Question 31: *Cette question est notée sur 4 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 *Réservé au correcteur*

(a) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Donner la définition rigoureuse de $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle non majorée. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.