Correction partie ouverte

Lénaïc Chizat

December 20, 2022

NB: The corrections are not intended as ideal examples for students, but rather are given as examples of minimal-redaction answers.

1 Question 29 (5pts)

(a) 2 points.

Par le changement de variable $u = -t$, pour tout $x \in I$ on a

$$\int_0^{-x} f'(t)dt = -\int_0^x f'(-u)du = \int_0^x f'(u)du$$

par l'hypothèse que f est impaire.

Sol. alt. Comme f' est impaire on a (cours)

$$0 = \int_{-x}^{-x} f'(t)dt = \int_{-x}^0 f'(t)dt + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x f'(u)du - \int_0^{-x} f'(t)dt.$$

(b) 2 points.

Supposons f' impaire et soit $x \in I$. D'une part,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt,$$
$$f(-x) - f(0) = \int_0^{-x} f'(t)dt,$$

D'autre part d'après la question a), on a $\int_0^{-x} f'(t)dt = \int_0^x f'(u)du$. On a donc

$$f(x) - f(0) = f(-x) - f(0)$$

et par conséquent $f(x) = f(-x)$. Ainsi, f est paire.

2 Question 30 (8 pts)

2.1 (a) 3 points

- Pour $k = 1$,
$$f^{(1)}(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x = (k-1)e^x + xe^x.$$
- Soit $k \geq 1$ et supposons que $f^{(k)}(x) = (k-1)e^x + xe^x$. Alors
$$f^{(k+1)}(x) = (k-1)e^x + e^x + xe^x = ke^x + xe^x.$$
- On a donc montré par récurrence que $f^{(k)}(x) = (k-1)e^x + xe^x$.

2.2 (b) 2 points

La série de Taylor de f en $x_0 = 1$ est donnée par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)e + e}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{(k-1)!}(x-1)^k.$$

2.3 (b) 3 points

Etudions le critère de D'Alembert pour les séries entières:

$$q = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{e/(k!)}{e/((k-1)!)} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Dans ce cas, le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

3 Question 31 (4 pts)

3.1 (a) 2 points

Définition rigoureuse de $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$:

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ a_n > M$$

(on peut de manière équivalente remplacer la dernière inégalité par une inégalité large).

3.2 (b) 2 points

Comme (u_n) n'est pas majorée, on peut construire par récurrence une suite $(k_n)_{n\geq 0}$ telle que $k_0 = 0$ et

$$k_n > k_{n-1} \qquad \text{et} \qquad u_{k_n} \geq n.$$

(details: comme u_n n'est pas majorée, l'emsemble $\{k \in \mathbb{N}\ ;\ k > k_{n-1},\ u_k \geq n\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non-vide, et on peut définir k_n comme son minimum).

On construit la sous-suite demandée (a_n) en posant $a_n = u_{k_n}$. En effet, (a_n) est bien une sous-suite (car k_n est strictement croissante) et comme $a_n \geq n$, on a, par comparaison, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.