Corrigé Série 14 : Dynamique du solide

Question conceptuelle

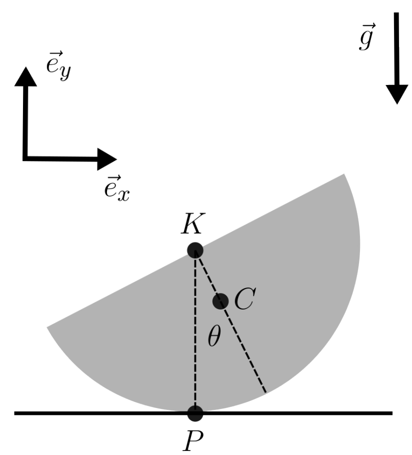
Lorsque le système motard-moto est en l'air, il ne subit que son poids comme force extérieure (on néglige les frottements de l'air). Le moment de ce poids par rapport au centre de masse est nul, donc le moment cinétique total du sytème par rapport au centre de masse est constant.

a) Si le motard freine la roue arrière, il diminue le moment cinétique de la roue, donc la conservation du moment cinétique total implique une mise en rotation de l'ensemble du système dans le même sens que la roue arrière, donc la moto pique du nez.

b) S'il freine avec la roue avant, il va se passer exactement la même chose.

c) Seule la roue arrière est motorisée. En ré-accélérant la roue arrière, le motard pourra arrêter la rotation de la moto (s'il redonne à la roue arrière sa vitesse de rotation initiale). Ainsi en freinant la roue arrière ou en donnant des gaz, le motard pourra garder sa vitesse de rotation sous contrôle pendant le saut.

1 Oscillation d'un demi-cylindre plein



Coupe du demi-cylindre au milieu de sa longueur.

a) Le plan Kxy est un plan de symmétrie du demi-cylindre. Par conséquent, la normale à ce plan, $\vec{e}_z$, est un axe principal d'inertie du solide.

b) On peut résoudre cette question en utilisant soit l'énergie mécanique, soit le théorème du moment cinétique. On vous propose les deux corrections ci-dessous.

Via l'énergie mécanique :

Le cylindre est soumis à trois forces : la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ s'appliquant en C, les forces de réaction $\vec{R}$ et de frottement $\vec{F}$ s'appliquant en P. Comme le solide roule sans glissement, la vitesse de P est nulle. Le travail de ces forces étant donné par

$$W = \int dt(\vec{F} + \vec{R}).\vec{v}_P,$$

ces forces ne travaillent pas et l'énergie mécanique est conservée.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique du système et de son énergie potentielle. Commencons par l'énergie cinétique, celle-ci est donnée par :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{C,z}\dot{\theta}^2,$$

où $I_{C,z}$ est le moment d'inertie en C selon l'axe principal $\vec{e}_z$. Le théorème de Huygens-Steiner nous donne :

$$I_{K,z} = I_{C,z} + mKC^2 \Leftrightarrow I_{C,z} = I_{K,z} - mKC^2 = \frac{1}{2}mr^2 - m\frac{16r^2}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 32}{18\pi^2}mr^2.$$

De plus, le solide est en roulement sans glissement, ce qui nous donne

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \overrightarrow{CP} \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z) = \overrightarrow{CP} \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z)$$

Par conséquent,

$$v_C^2 = \dot{\theta}^2\overrightarrow{CP}^2 = \dot{\theta}^2(\overrightarrow{CP})^2 = \dot{\theta}^2(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KP})^2 = \dot{\theta}^2(\overrightarrow{KC}^2 + r^2 - 2rKC\cos\theta).$$

Passons maintenant à l'énergie potentielle : la masse peut être considérée comme si elle était au point C, et donc

$$E_{pot} = mgy_C = mg(r - KC\cos\theta).$$

L'énergie mécanique est finalement donnée par :

$$E = \frac{1}{2}\left(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC\cos\theta)\right)\dot{\theta}^2 + mg(r - KC\cos\theta).$$

Celle-ci est conservée, et on peut donc obtenir les équations du moment en la dérivant par rapport au temps.

$$\frac{dE}{dt} = \left(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC\cos\theta)\right)\dot{\theta}\ddot{\theta} + rmKC\dot{\theta}^3\sin\theta + mgKC\dot{\theta}\sin\theta = 0.$$

$$\left(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC\cos\theta)\right)\ddot{\theta} + rmKC\dot{\theta}^2\sin\theta + mgKC\sin\theta = 0.$$

Dans la limite des petits angles θ, en admettant que $\dot{\theta}$ est aussi petit, on peut simplifier cette équation en :

$$\left(I_{C,z} + m(KC^2 + r^2 - 2rKC)\right)\ddot{\theta} + mgKC\theta = 0.$$

On obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{mgKC}{I_{C,z} + m(KC - r)^2}.$$

$$\omega_0^2 = \frac{mg\frac{4r}{3\pi}}{\frac{9\pi^2-32}{18\pi^2}mr^2 + m(\frac{4r}{3\pi} - r)^2} = \frac{g}{r}\frac{8}{9\pi - 16}$$

La période des oscillations est donnée par

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Via le théorème du moment cinétique :

La fréquence des petites oscillations autour de l'équilibre peut être également établie en appliquant le thèoreme du moment cinétique au point de contact P. Comme les forces de frottement et de réaction du sol ne s'appliquent qu'au point P, la somme des moments de forces extérieures se réduit au moment de force de la pensanteur. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \overrightarrow{PC} \wedge m\vec{g} \\ &= (\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KC}) \wedge m\vec{g}.\end{aligned}$$

Dans le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les vecteurs $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PK} &= r\vec{e}_y, \\ \overrightarrow{KC} &= \frac{4r}{3\pi}\big(-\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y\big).\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \overrightarrow{PC} \wedge m\vec{g} \\ &= \Big[\frac{4r}{3\pi}\sin\theta\vec{e}_x + \Big(r - \frac{4r}{3\pi}\cos\theta\Big)\vec{e}_y\Big] \wedge -mg\vec{e}_y \\ &= -\frac{4mgr}{3\pi}\sin\theta\vec{e}_z.\end{aligned} \tag{1}$$

Par ailleurs, le moment cinétique au point P est donné par $\vec{L}_P = I_{P,z}\dot{\theta}\vec{e}_z$. Pour obtenir l'équation de mouvement de l'angle θ, il faut calculer le moment d'inertie en P selon l'axe $\vec{e}_z$. Par le théorème de Huygens-Steiner, on a

$$\begin{aligned}I_{P,z} &= I_{C,z} + m(\overrightarrow{CP})^2 \\ &= I_{K,z} - m(\overrightarrow{CK})^2 + m(\overrightarrow{CP})^2.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CP})^2 - (\overrightarrow{CK})^2 &= \Big[\Big(r - \frac{4r}{3\pi}\cos\theta\Big)^2 + \Big(\frac{4r}{3\pi}\sin\theta\Big)^2\Big] - \Big[\Big(\frac{4r}{3\pi}\cos\theta\Big)^2 + \Big(\frac{4r}{3\pi}\sin\theta\Big)^2\Big] \\ &= r^2 - \frac{8r^2}{3\pi}\cos\theta.\end{aligned}$$

Donc, le moment d'inertie en P selon l'axe $\vec{e}_z$ est égal à

$$I_{P,z} = \frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi}\cos\theta.$$

Il suit alors de l'équation (1) que l'équation du mouvement de l'angle θ est donnée par

$$\Big(\frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi}\cos\theta\Big)\ddot{\theta} = -\frac{4mgr}{3\pi}\sin\theta.$$

Dans l'approximation des petits angles, i.e. $\theta << 1$, on a $\cos\theta \approx 1$ et $\sin\theta \approx \theta$. On retrouve donc l'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0^2 = \frac{\frac{4mgr}{3\pi}}{\frac{3}{2}mr^2 - \frac{8mr^2}{3\pi}} = \frac{g}{r}\frac{8}{9\pi - 16}.$$

Remarque :

L'énergie cinétique du système peut être calculée en considérant le point de contact P. Comme la vitesse de ce point est nulle, l'expression de l'énergie cinétique ne contient que la contribution de la rotation du cylindre autour de l'axe passant par P et selon $\vec{e}_z$, i.e.

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_{P,z} \dot{\theta}^2.$$

c) Les seuls changements viennent du déplacement du centre de masse et du moment d'inertie principal. Le centre de masse reste aligné sur l'axe vertical quand $\theta = 0$, et seul sa distance à K change. De même l'axe $\vec{e}_z$ reste un axe principal d'inertie, et il suffit de changer I_K/I_C selon la forme choisie.

d) Vous pouvez trouver un schéma des coordonées choisies plus loin. Commencons par le calcul du moment d'inertie du demi-cylindre en K, en utilisant la formule $I_{K,z} = \sum_j m_j d_j^2$. On peut considérer des coordonnées cylindriques centrées en K au vu de la forme du système, tel que

$$I_{K,z} = \iiint\limits_{\text{demi cyl}} \rho r^2 \times r dr d\phi dz.$$

On rappelle que l'élément d'intégration en cylindrique est $r dr d\phi dz$.

$$I_{K,z} = \rho \int\limits_0^r r^3 dr \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz = \rho \frac{r^4}{4} \pi L.$$

La masse volumique ρ est donnée par $\rho = \frac{m}{\frac{\pi}{2} r^2 L}$, telle que

$$I_{K,z} = \frac{1}{2} m r^2.$$

Pour obtenir le centre de gravité, on va utiliser l'équation

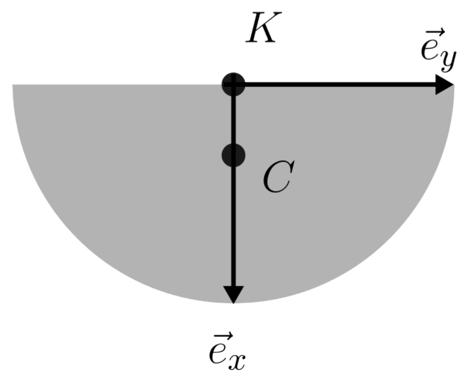
$$m\vec{KG} = \sum_j m_j \vec{KG}_j.$$

A nouveau, nous utilisons les coordonnées cylindriques centrées en K, et partons de la positions d'équilibre :

$$x_G = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\text{demi-cyl}} \rho r \cos\phi \times r dr d\phi dz = \frac{\rho}{m} \int\limits_0^r dr r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\phi \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz = \frac{1}{\frac{\pi}{2} r^2 L} \frac{r^3}{3} \times 2 \times L = \frac{4}{3\pi} r.$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\text{demi-cyl}} \rho r \sin\phi \times r dr d\phi dz = \frac{\rho}{m} \int\limits_0^r dr r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi d\phi \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz = 0.$$

$$z_G = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\text{demi-cyl}} \rho z \times r dr d\phi dz = \frac{\rho}{m} \int\limits_0^r dr r \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z dz = 0.$$


K
$\vec{e}_y$
C
$\vec{e}_x$