Exercice 2.

i) 1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) Impaire, non-périodique

3) $f(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$

4) En tant que composition de fonctions élémentaires f est continue sur $D(f)$.

5) f est dérivable sur $D(f)$

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\ , \quad D(f') = D(f) \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \frac{2x\,(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\ , \quad D(f'') = D(f)$$

6) • $f'(x) < 0$ pour tout $x \in D(f')$, donc pas de point stationnaire

• $f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$. On calcule alors f''':

$$f'''(x) = -\frac{6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4} < 0 \qquad \text{pour tout } x \in D(f).$$

Comme $f'''(0) = -6 \neq 0$, f a un point d'inflexion en $x = 0$.

7) • Monotonie :

x	$]-\infty, -1[$	$]-1, 1[$	$]1, \infty[$
f'	< 0	< 0	< 0
f	décroissante	décroissante	décroissante

Notez bien que f est strictement décroissante sur chacun des intervalles listés dans le tableau mais pas sur $D(f)$; en effet le Corollaire 1 du Théorème des accroissements finis s'applique seulement à des intervalles.

• Convexité/concavité :

x	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, \infty[$
f''	< 0	> 0	< 0	> 0
f	concave	convexe	concave	convexe

8) • Asymptotes verticales: f n'est pas définie en $x = \pm 1$ et on a $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ ainsi que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, donc des asymptotes verticales en $x = \pm 1$.

• Asymptote horizontale: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, donc une asymptote horizontale en $y = 0$.

9) Le graphe de f est tracé à la Fig. 4.

ii) 1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}$, $\quad \text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left]1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ (sera obtenue à la fin de cette étude)

2) ni paire, ni impaire, pas périodique

3) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$.

4) Continue sur $D(f)$ (composition de fonctions élémentaires)

5) f est dérivable sur $D(f)$

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(2x-1) - 2(3x^2-x)}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2-6x+1}{(2x-1)^2}\ , \qquad D(f') = D(f)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(12x-6)(2x-1)^2 - 4(6x^2-6x+1)(2x-1)}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{(12x-6)(2x-1) - 4(6x^2-6x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{2}{(2x-1)^3}\ , \qquad D(f'') = D(f) \end{aligned}$$

6) • $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{12} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$

Donc f a des points stationnaires en $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. Comme

$$f''(x_{1,2}) = \frac{2}{\left(2\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - 1\right)^3} = \frac{2}{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3} = \pm\frac{2}{3^{-3/2}} = \pm 6\sqrt{3} \ ,$$

il suit que x_1 est un minimum local (car $f''(x_1) > 0$) et x_2 un maximum local (car $f''(x_2) < 0$) de f.

• Comme $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(f)$, f n'a pas de point d'inflexion.

7) • Monotonie :

x	$\left]-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right[$	$\left]\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right[$	$\left]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right[$	$\left]\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \infty\right[$
f'	> 0	< 0	< 0	> 0
f	croissante	décroissante	décroissante	croissante

• Convexité/concavité :

x	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	$\left]\frac{1}{2}, \infty\right[$
f''	< 0	> 0
f	concave	convexe

8) • Asymptote verticale: f n'est pas définie en $x = \frac{1}{2}$ et

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^{\pm}} \frac{x(3x-1)}{2x-1} = \pm\infty$$

parce que $x(3x-1) > 0$ pour x proche de $\frac{1}{2}$. Donc f a une asymptote verticale en $x = \frac{1}{2}$.

• Asymptote horizontale:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(3x-1)}{2x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x-1}{2-\frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

donc f n'a pas d'asymptote horizontale.

• Asymptote oblique:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x-1}{2x-1} = \frac{3}{2} \qquad \text{et}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - ax\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x(2x-1+x)}{2x-1} - \frac{3}{2}x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2x-1}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2(2x-1)} = \frac{1}{4}$$

Ainsi f a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$.

9) Grâce aux informations trouvées, on sait qu'il suffit de calculer les valeurs de f aux extremums locaux $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ pour connaître son image. Or,

$$f(x_{1,2}) = \frac{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(3\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) - 1\right)}{\pm 3^{-1/2}} = \pm\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

Comme $f(x_1) > f(x_2)$ on conclut en tenant compte de la nature des extremums locaux de f en x_1 et x_2 que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left]1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ comme donnée sous 1).
Le graphe de f est tracé à la Fig. 5.

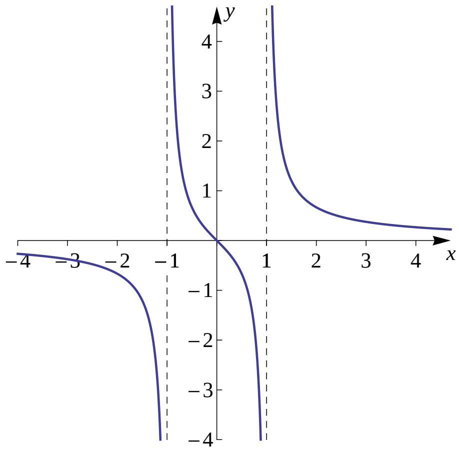

Fig. 4

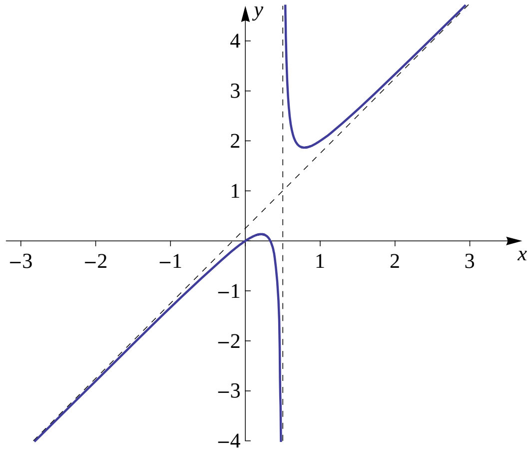

Fig. 5

iii) 1) $D(f) = \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) ni paire, ni impaire, pas périodique

3) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$

4) f est continue sur $D(f)$ en tant composition de fonctions élémentaires.

5) f est dérivable sur $D(f)$, donc $D(f') = D(f'') = D(f)$ et

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2 - 2x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^5}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

6) • $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$
Donc f a des points stationnaires en $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. Comme $f''(x_1) = 0$, il faut calculer f''' pour voir si x_1 pourrait quand-même être un extremum local (cf. remarque à la fin du § 5.10.2 du cours). On a

$$f'''(x) = \left(-\frac{9}{x^4} - \frac{8}{x^5} + \frac{5}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^5} \cdot \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{-9x^3 - 5x^2 + 7x - 1}{x^7}\, e^{-\frac{1}{x}},$$

donc $f'''(x_1) = 4e \neq 0$. Ainsi x_1 n'est pas un extremum local (en fait c'est un point d'inflexion, voir aussi ci-après). D'autre part, on a $f''(x_2) = \frac{4}{e} > 0$ et donc x_2 est un minimum local.

• $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$
Ainsi $x_1 = -1$ et $x_3 = \frac{1}{3}$ sont candidats pour un point d'inflexion. On vient de voir que $f'''(x_1) = 4e \neq 0$ et puis on a $f'''(x_3) = \frac{4 \cdot 3^5}{e^3} \neq 0$, c'est-à-dire $x_1 = -1$ et en $x_3 = \frac{1}{3}$ sont des points d'inflexion.

7) • Monotonie :

x	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, \infty[$
f'	> 0	> 0	< 0	> 0
f	croissante	croissante	décroissante	croissante

- Convexité/concavité :

x	$]-\infty,-1[$	$]-1,0[$	$]0,\frac{1}{3}[$	$]\frac{1}{3},\infty[$
f''	<0	>0	<0	>0
f	concave	convexe	concave	convexe

8) - Asymptote verticale: f n'est pas définie en $x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\infty$, donc une asymptote verticale en $x=0$.
- Asymptote horizontale: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, donc aucune
- Asymptote oblique: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et

$$\begin{aligned} b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-ax\big) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x-1}{x}-xe^{\frac{1}{x}}\right)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x-1}{x}-xe^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\lim_{x\to\pm\infty}e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$ et la première limite s'écrit

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty}\left(x(1-e^{\frac{1}{x}})-2-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}-2-\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}_{=0} \\ &\overset{\text{BH}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}-2=-1-2=-3 \end{aligned}$$

Ainsi $b=-3$ et f a une asymptote oblique d'équation $y=ax+b=x-3$.

9) Le graphe de f est tracé à la Fig. 6.

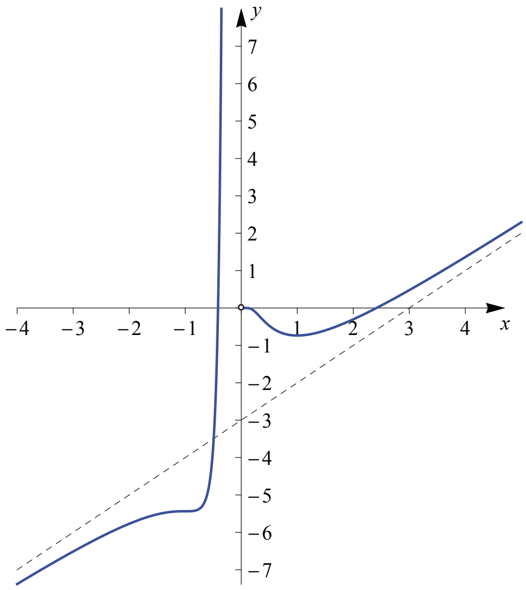

Fig. 6