8.7 Intégration de développements limités

Thm : Soit $f \in C^n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et le DL_n suivant :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \cdot \varepsilon_1(x)$$

où $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Alors :

$$\int_a^x f(t)\,dt = (x-a)\cdot f(a) + \frac{1}{2}\cdot f'(a)\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\cdot \varepsilon_2(x)$$

où $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

Preuve : Il suffit d'intégrer terme à terme. Vérifions la forme du reste :

$$R(x) = \int_a^x (t-a)^n \cdot \varepsilon_1(t)\,dt$$

$$= (x-a)\cdot(u_x-a)^n \cdot \varepsilon_1(u_x) \quad \text{pour un certain } u_x \in]a,x[\text{ par le Thm. de la moyenne.}$$

fin cours 14/12

$$= (x-a)^{n+1} \cdot \underbrace{\left(\frac{u_x - a}{x-a}\right)^n \cdot \varepsilon_1(u_x)}_{\varepsilon_2(x)}$$

On a $|\varepsilon_2(x)| \leqslant \left|\frac{u_x-a}{x-a}\right|^n \cdot |\varepsilon_1(u_x)| \leqslant |\varepsilon_1(u_x)|$

Donc $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Ceci montre la forme du reste.

Exemple : Soit $F(x) = \int_0^x \sin(\cos(t))\,dt$. Calculer le DL_5 de F en 0.

On a besoin du DL_4 de $\sin \circ \cos$ en 0.

(i) $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t) \qquad (\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0)$

(Rmq : on pourrait remplacer par $t^5\varepsilon(t)$. Pourquoi ?)

(ii) DL_2 de $\sin$ en $1 = \lim_{t \to 0} \cos(t)$. Par la formule de Taylor :

$$\sin(u) = \sin(1) + \cos(1)\cdot(u-1) - \frac{\sin(1)}{2}(u-1)^2 + (u-1)^2\varepsilon(u) \qquad (\varepsilon(u) \xrightarrow[u \to 1]{} 0)$$

(iii) $f(t) = \sin(\cos(t))$

$$= \sin(1) + \cos(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)\right)$$

pourquoi ?

$$- \frac{\sin(1)}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)\right)^2 + t^4\varepsilon(t) \quad \text{avec } \varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$= \sin(1) - \frac{\cos(1)}{2}t^2 + \left(\frac{\cos(1)}{24} - \frac{\sin(1)}{8}\right)t^4 + t^4\varepsilon(t)$$

(iv) On applique le Thm. ci dessus :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sin(1)\cdot x - \frac{\cos(1)}{6}x^3 + \left(\frac{\cos(1)}{24} - \frac{\sin(1)}{8}\right)\frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\left(\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0\right)$$

8.8 Intégration des séries entières

Thm : Une série entière peut s'intégrer terme à terme et le rayon de convergence de la série entière obtenue est le même que celui de la série d'origine.

Exemple : Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f \in C^\infty(I)$

La série de Taylor de f en 0 (aussi appelée série de MacLaurin) :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Si S a pour rayon de convergence R, alors pour $x \in]-R, R[$, on a

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\int_0^x t^k\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

$$\underset{(\ell = k+1)}{=} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{f^{(\ell-1)}(0)}{\ell!}x^\ell$$

On reconnait la série de Taylor associée à $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

car $F^{(\ell)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell = 0 \\ f^{(\ell-1)}(0) & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$

② Soit $f(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}$ (devlpmt en série entière de exp)

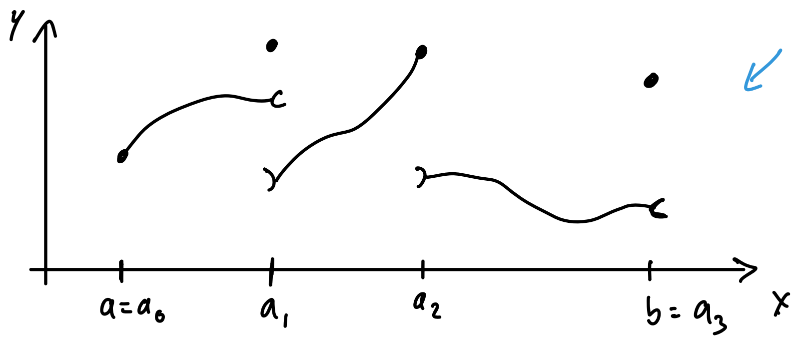
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!} \qquad (R = +\infty)$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

8.9 Intégration des fonctions continues par morceaux

Def : Une fonction continue par morceaux est une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 \dots < a_n = b$ et n fonctions $f_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$ continues, telles que

$$f(x) = f_i(x), \quad \forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \; i \in \{0, \dots, n-1\}.$$



Exemple de fonction continue par morceaux

(Exemple de fonction qui n'est pas continue par morceaux : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \sin(1/x) & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$)

Def : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, alors

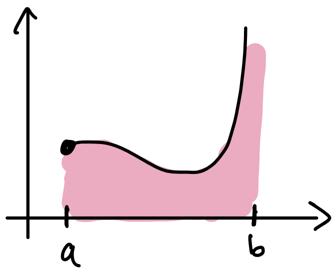
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,dt$$

Exemple : $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \end{cases}$ (ici $f_0(x) = 3$ sur $[0,1]$, $f_1(x) = 2$ sur $[1,4]$)

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 3\,dx + \int_1^4 2\,dx = 3 + 2 \cdot 3 = 9.$$

Chapitre 9 : Intégrales généralisées (ou impropres)

8.1 Type 1 : f est continue sur $[a,b[$ $(a, b \in \mathbb{R}, a<b)$



→ On définit $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)\,dt$ si la limite existe dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

- On peut aussi écrire $\int_a^{b^-} f(t)\,dt$ pour souligner que l'intégrale est impropre en b.

- Si la limite est réelle ($\in \mathbb{R}$) on dit que l'intégrale converge.
- Si la limite n'existe pas on dit que la fonction n'est pas intégrable.

→ Si f continue sur $]a,b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f(t)\,dt$

→ Si f continue sur $]a,b[$ alors on choisit $c \in]a,b[$ quelconque et on définit :

$$\int_{a+}^{b-} f(t)\,dt = \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{b-} f(t)\,dt$$ ssi les 2 intégrales existent.

Exemple :

1) $f(x) = \frac{1}{x^r}$ sur $x \in]0,1]$. Comportement de l'intégrale en fonction de r ?

$$\begin{cases} \text{Si } r \leqslant 0, & f \text{ est continue sur } [0,1] : \text{ intégrable au sens classique} \\ \text{Si } r > 0, & f \text{ est continue sur }]0,1]. \end{cases}$$

Si $r \neq 1$,

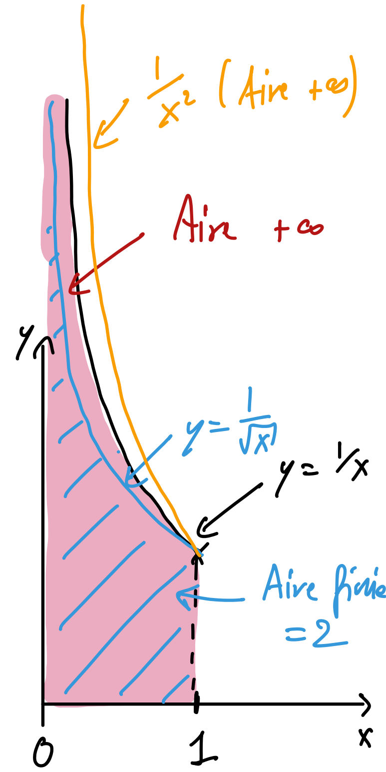
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^r} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 x^{-r}\, dx$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[\frac{1}{1-r} x^{1-r} \right]_\alpha^1$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{\alpha^{1-r}}{1-r} \right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & \text{si } 1-r \geq 0 \iff r \leq 1 \\ +\infty & \text{si } 1-r < 0 \iff r > 1 \end{cases}$$

(donc $r < 1$ car $r \neq 1$)



Si $r = 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[\log x \right]_\alpha^1 = \lim_{\alpha \to 0+} \left(0 - \log \alpha \right) = +\infty$$

2) Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$

⚠ Fausse piste : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \left[\frac{-1}{3} x^{-3} \right]_{-1}^1 = \frac{-1}{3} - \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{-2}{3}$ Faux !

→ La fonction n'est pas continue sur $[-1, 1]$ donc on ne peut pas appliquer le Thm. fondamental de l'analyse.

En fait : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^{0-} \frac{dx}{x^4} + \int_{0+}^1 \frac{dx}{x^4} = 2 \int_{0+}^1 \frac{dx}{x^4} = +\infty$

fin cours 18/12