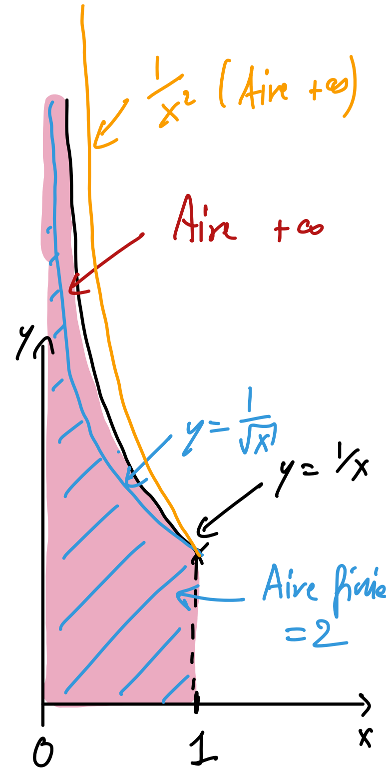
Si $r \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^r} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 x^{-r}\, dx$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[\frac{1}{1-r} x^{1-r} \right]_\alpha^1$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{\alpha^{1-r}}{1-r} \right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & \text{si } 1-r \geq 0 \iff r \leq 1 \\ & \text{(donc } r < 1 \text{ car } r \neq 1\text{)} \\ +\infty & \text{si } 1-r < 0 \iff r > 1 \end{cases}$$



Si $r = 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} [\log x]_\alpha^1 = \lim_{\alpha \to 0+} (0 - \log \alpha) = +\infty$$

2) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$

⚠ Fausse piste : $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \left[\frac{-1}{3} x^{-3} \right]_{-1}^1 = \frac{-1}{3} - \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{-2}{3}$ Faux !

→ La fonction n'est pas continue sur $[-1, 1]$ donc on ne peut pas appliquer le Thm. fondamental de l'analyse.

En fait : $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^{0-} \frac{dx}{x^4} + \int_{0+}^1 \frac{dx}{x^4} = 2 \int_{0+}^1 \frac{dx}{x^4} = +\infty$

fin cours 18/12

Annonces : série 13 bis - exercices de rédaction - forum - évaluation du cours.

3/ $\displaystyle\int_0^1 \log(x)\, dx \equiv \int_{0+}^1 \log(x)\, dx = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \log(x)\, dx$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[x \log x - x \right]_\alpha^1$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} -1 - (\alpha \log \alpha - \alpha) = -1$$

$$\left(\lim_{\alpha\to 0+} \alpha \log \alpha = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{\log(\alpha)}{1/\alpha} \overset{B.H}{=} \lim_{\alpha\to 0+} \frac{1/\alpha}{-1/\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0+} -\alpha = 0 \right)$$

Rmq: On peut utiliser le critère de comparaison pour montrer qu'une intégrale diverge ou converge (sans trouver de primitive).

Ex: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x)}{x}\,dx$

Comme $\lim_{x\to 0+} \log(x) = -\infty$, $\exists c \in]0,1[$ tel que $\log(x) < -1$, $\forall x \in]0,c]$

Donc $\forall x \in]0,c]$, $\dfrac{\log(x)}{x} \leq \dfrac{-1}{x}$ or $\displaystyle\int_0^c \frac{-dx}{x} \overset{\text{diverge}}{=} -\infty$

Donc par comparaison $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x)}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^c \frac{\log(x)}{x}\,dx}_{= -\infty \text{ par comparaison}} + \underbrace{\int_c^1 \frac{\log(x)}{x}\,dx}_{\in \mathbb{R}} \overset{\text{diverge}}{=} -\infty$

Détail : $\displaystyle\int_\alpha^c \frac{\log(x)}{x}\,dx \leq \int_\alpha^c \frac{-dx}{x}$

$\downarrow_{\alpha\to 0+}$ $-\infty$ $\xleftarrow{\text{donc}}$ $\downarrow_{\alpha\to 0+}$ $-\infty$

$\boxed{\text{Type 2 :}}$ • Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue.

On définit $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,dx$

• De même si $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continue

On définit $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^b f(x)\,dx$

Exemple: $f(x) = \dfrac{1}{x^r}$, $r \in \mathbb{R}$ un paramètre.

• Si $r \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^r} = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^r}$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{1-r} x^{1-r} \right]_1^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{1-r}\left(M^{1-r} - 1\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1-r > 0 \iff r < 1 \\ \dfrac{-1}{1-r} = \dfrac{1}{r-1} & \text{si } 1-r < 0 \iff r > 1 \end{cases}$$

• Si $r = 1$:

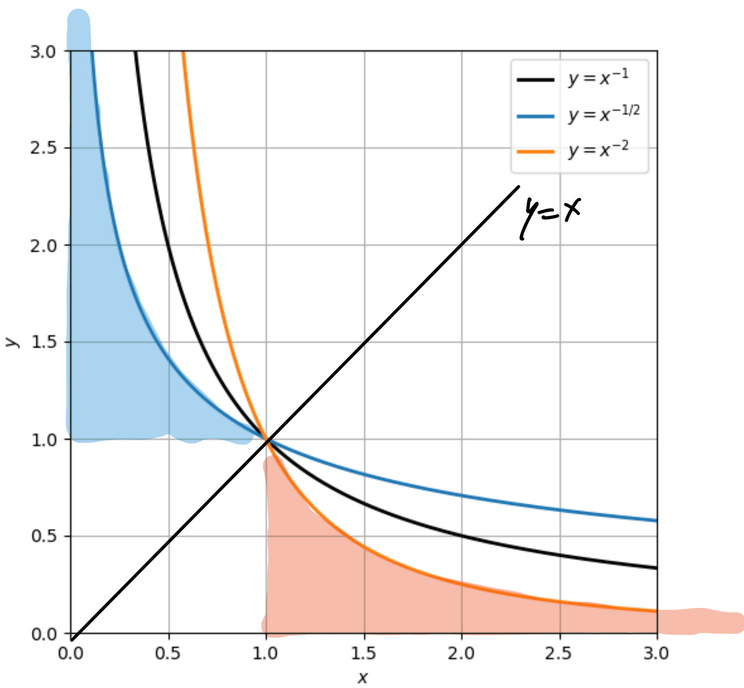
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \Big[\log(x) \Big]_1^M$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \log(M) = +\infty$$

<u>Résumé</u> :

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-r} & \text{si } r < 1 \end{cases} \\[2em] \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \leq 1 \\ \dfrac{1}{r-1} & \text{si } r > 1 \end{cases} \end{array}}$$



Rmq : Les fonctions $\left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^r} \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to &]0,1] \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^{1/r}} \end{array} \right.$

sont des fonctions réciproques.

$$\left(y = \frac{1}{x^r} \iff \frac{1}{y} = x^r \iff x = \frac{1}{y^{1/r}} \right)$$

Par symétrie autour de l'axe $y=x$, on a :

$$\text{Aire en bleu (pour } n=\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{dx}{x^n} - 1$$
$$= \frac{1}{1-n} - 1$$
$$= \frac{n}{1-n} = \frac{1}{1/n - 1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/n}} = \text{Aire en orange}$$

Continuons avec d'autres exemples :

(ii) $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty}$ (signifie $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x} - (-e^{-1})\right)$)

$$= 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} + \lim\limits_{M\to-\infty} \int_M^0 \frac{dx}{1+x^2}$

⚠ Il faut que les 2 limites existent pour que l'intégrale existe.

La fonction est paire, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= 2 \lim_{M\to+\infty} \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^M$$
$$= 2 \lim_{M\to+\infty} \operatorname{arctg}(M) - 2\operatorname{arctg}(0)$$
$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

⚠ On ne peut pas écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim\limits_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} f(t)\,dt$

Contre-exemple : $\int_{-M}^{M} \sin(t)\,dt = 0$, $\forall M>0$ car sin est impaire

Mais $\lim\limits_{M\to+\infty} \int_0^M \sin(t)\,dt = \lim\limits_{M\to+\infty} \left[-\cos(t)\right]_0^M$

$$= \lim_{M\to+\infty} -\cos(M) + 1 \quad \text{n'existe pas}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ n'existe pas.

$\boxed{\text{Type 3}}$: combinaison de type 1 et type 2.

Soit $f :]a, +\infty[$ continue

On définit $\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ où $c \in]a, +\infty[$ arbitraire

$$= \lim_{\alpha \to a+} \lim_{M \to +\infty} \int_{\alpha}^{M} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \lim_{\alpha \to a+} \int_{\alpha}^{M} f(x)\,dx$$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}$ continue sur $]0, +\infty[$

Détail : $f(x) = -2 g'(x) e^{g(x)}$ avec $g(x) = -\sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to 0+} \left(\lim_{M \to +\infty} \left[-2 e^{-\sqrt{x}} \right]_{\alpha}^{M} \right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left\{ \lim_{M \to +\infty} \left(-2e^{-\sqrt{M}} + 2e^{-\sqrt{\alpha}} \right) \right\}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left\{ 0 + 2e^{-\sqrt{\alpha}} \right\}$$

$$= 2$$

fin cours