Prof. Friedrich Eisenbrand 23 février 2024

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 1 - Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit R un anneau et $\alpha \in Z(R)$ un élément du centre de R. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & R[x] & \to & R \\ & f(x) & \mapsto & f(\alpha) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux surjectif.

Soit $R = \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Trouver $\alpha \in R$ (qui n'appartient donc pas à $Z(R)$) et deux polynômes $g, h \in R[x]$ tel que

$$g(\alpha) \cdot h(\alpha) \neq (g \cdot h)(\alpha).$$

Solution. *Pour montrer que Φ est un morphisme d'anneaux, il faut vérifier les trois propriétés suivantes.*

- $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$,
- $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$, *et*
- $\Phi(1) = 1$.

Les deux dernières propriétés se montrent sans difficulté. Montrons donc la première.

Soient $f(x) = \sum\limits_i a_i x^i$ et $g(x) = \sum\limits_j b_j x^j$, où les sommes sont finies et sur des entiers naturels. Alors $(fg)(x) = f(x)g(x) = \sum\limits_{i,j} a_i b_j x^{i+j}$. On a donc $\Phi(fg) = \sum\limits_{i,j} a_i b_j \alpha^{i+j}$. De plus,

$$\Phi(f)\Phi(g) = \sum_i a_i \alpha^i \sum_j b_j \alpha^j = \sum_{i,j} a_i \alpha^i b_j \alpha^j = \sum_{i,j} a_i b_j \alpha^{i+j},$$

où la dernière égalité vient de la commutativité de α avec les éléments de R.

La surjectivité de Φ découle du fait qu'un élément de R (polynôme constant) est envoyé sur lui-même.

Pour la deuxième partie de l'exercice on peut choisir par exemple $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$ *et* $g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$ *pour obtenir* $g(\alpha) \cdot h(\alpha) \neq (g \cdot h)(\alpha)$. *On a donc montré qu'avec ce choix* Φ *n'est pas un morphisme d'anneaux.*

Exercice 2. Soit R un anneau et $S \subseteq R$. Montrer que S est un anneau si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

a) $1 \in S$

b) Pour $s, t \in S$ alors $s \cdot t \in S$ et $s - t \in S$.

Solution. *Il faut vérifier les conditions (R1) à (R7) de la définition d'anneau en utilisant le fait que R est un anneau et les conditions a) et b).*

Exercice 3. Pour cet exercice on travaille sur le corps fini $\mathbb{Z}_5$.

i) Trouver le polynôme $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ de degré au plus 4 tel que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$. Établir un système d'équations linéaires correspondant.

ii) Soient les polynômes $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$ sur le corps $\mathbb{Z}_5$. Trouver deux polynômes q et r sur $\mathbb{Z}_5$ tels que :

- $f = qg + r$ et
- $deg(r) < deg(g)$.

Solution. *i) Soit le polynôme* $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. *On a que*

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a + b + c + d + e &= 2 \\ a + 2b + 4c + 8d + 16e &= 4 \\ a + 3b + 9c + 27d + 81e &= 0 \\ a + 4b + 16c + 64d + 256e &= 4 \end{aligned}$$

On peut simplifier le système, vu que les coefficients sont dans $\mathbb{Z}_5$. *On doit résoudre le système :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On résout ce système d'équations sur $\mathbb{Z}_5$ *et on trouve des valeurs pour* a, b, c, d, e. *Le système donne comme solution* $a = 1, b = 0, c = 3, d = 4, e = 4$. *Le polynôme* $f(x)$ *sera donc* $f(x) = 1 + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4$.

ii) On trouve que $3x^4+2x^2+x+1=(2x^2+3x+2)(4x^2+4x+1)+4$.
Les détails:

$$\begin{array}{c|l}
3x^4+2x^2+x+1 & 2x^2+3x+2 \\ \cline{2-2}
3x^4+2x^3+3x^2 & \quad 4x^2+\ldots \\ \cline{1-1}
3x^3+4x^2+x+1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
3x^4+2x^2+x+1 & 2x^2+3x+2 \\ \cline{2-2}
3x^4+2x^3+3x^2 & 4x^2+4x+\ldots \\ \cline{1-1}
3x^3+4x^2+x+1 & \\
3x^3+2x^2+3x & \\ \cline{1-1}
2x^2+3x+1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
3x^4+2x^2+x+1 & 2x^2+3x+2 \\ \cline{2-2}
3x^4+2x^3+3x^2 & 4x^2+4x+1 \\ \cline{1-1}
3x^3+4x^2+x+1 & \\
3x^3+2x^2+3x & \\ \cline{1-1}
2x^2+3x+1 & \\
2x^2+3x+2 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

Exercice 4. Soit K un corps. Montrer que le déterminant de $A=V_{r_0,\ldots,r_n}\in K^{(n+1)\times(n+1)}$ est

$$\det(V_{r_0,\ldots,r_n})=\prod_{0\le i<j\le n}(r_j-r_i).$$

Solution. *On montre que* $\det(A)=\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ *par récurrence :*
Pour $n=1$*:* $A=\begin{pmatrix}1 & x_0\\ 1 & x_1\end{pmatrix}$ *et clairement* $\det(A)=x_1-x_0$.
Pour $n>1$*: On modifie* A *par l'addition de* $(-x_0)$ *fois la colonne* j *à la colonne*

$j+1$ pour $j = n, n-1, \ldots, 1$ et on obtient la matrice suivante

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1x_0 & \ldots & x_1^n - x_1^{n-1}x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_0 & \ldots & x_{n-1}^n - x_{n-1}^{n-1}x_0 \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_nx_0 & \ldots & x_n^n - x_n^{n-1}x_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \ldots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_0 & (x_{n-1} - x_0)x_{n-1} & \ldots & (x_{n-1} - x_0)x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & \ldots & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors $\det(A) = \det(A') = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0)\det(B')$ *où B' est la matrice donnée par*

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\det(B') = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$, *et donc* $\det(A) = \det(A') = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$.

Exercice 5. Soit K un corps et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ des éléments distincts ($n \geq 1$). On définit

$$c_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k}(x - a_i)}{\prod_{i \neq k}(a_k - a_i)}$$

et soit $f(x) \in K[x]$ un polynôme tel que $f(x) \equiv 0$ ou $\deg(f(x)) \leq n$. Montrer que

$$f(x) = f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \cdots + f(a_n)c_n(x).$$

Solution. *Remarquons que les polynômes c_k sont tous de degré n et valent 1 en $x = a_k$ et 0 en a_i pour $i \neq k$.*

On a donc, par construction des c_k, que la somme

$$g(x) := f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \cdots + f(a_n)c_n(x)$$

est un polynôme de degré n vérifiant $g(a_k) = f(a_k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

De plus, d'après le cours, pour que deux polynômes de degrés n soient égaux il faut et il suffit qu'ils soient égaux en $n+1$ valeurs distinctes. D'où $g \equiv f$.

Exercice 6. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$, $\deg(f) \geq 2$.

i) Si $\deg(f)$ est impair, alors $f(x)$ n'est pas irréductible.

ii) Si $f(x)$ est irréductible, alors $\deg(f) = 2$.

iii) Montrer comment ii) implique que chaque polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ possède une racine complexe.

Pour le point ii), utiliser le théorème fondamental de l'algèbre[1].

Solution. *Comme ii) implique i) il suffit de démontrer ii) et iii).*

ii) *Soit $f(x) = a_0 + \cdots a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ irréductible et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de f (théorème fondamental de l'algèbre). On a $\alpha \notin \mathbb{R}$ car $\deg(f) \geq 2$ et f est irréductible par hypothèse (f ne possède pas de racines réelles). Soit $\overline{\alpha}$ le conjugué complexe de α. Alors*

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{0} \\ &= \overline{a_0 + a_1\alpha + \cdots a_n\alpha^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \cdots \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha}^n \\ &= a_0 + a_1 \cdot \overline{\alpha} + \cdots a_n \cdot \overline{\alpha}^n \\ &= f(\overline{\alpha}). \end{aligned}$$

Ainsi $(x - \alpha) \mid f(x)$ et $(x - \overline{\alpha}) \mid f(x)$ (sur $\mathbb{C}$). Les deux polynômes $(x - \alpha) \neq (x - \overline{\alpha})$ sont irréductibles, alors $g(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \overline{\alpha}) \mid f(x)$. On observe que $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Il existe alors $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $g(x)h(x) = f(x)$.

Si $g(x)$ ne divise pas $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, alors la division avec reste donne $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ où $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ $r(x) \neq 0$ et $\deg(r) < \deg(g) = 2$. Mais $r = f - qg = gh - qg = (h - q)g$ et $r \neq 0$ implique $\deg(r) \geq \deg(g)$. Alors $g \mid f$ sur $\mathbb{R}$. Comme f est irréductible, on obtient $f(x) = a \cdot g(x)$ où $a \in \mathbb{R}$. On a montré que $\deg(f) = 2$.

iii) *Il faut montrer que l'assertion suivante*

> *Tout polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ irréductible satisfait $\deg(f) \leq 2$.*

implique que tout polynôme réel de degré au moins 1 possède une racine complexe.

Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré au moins 1. On écrit la factorisation

$$f = a \prod_i p_i,$$

en polynômes irréductibles et unitaires $p_i \in \mathbb{R}[x]$ avec $a \in \mathbb{R}$. On supposant l'assertion, alors $\deg(p_i) \leq 2$ pour tout i. S'il existe un i tel que $\deg(p_i) = 1$, alors $p_i(x) = x - \alpha$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ et f possède la racine $\alpha \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Autrement $p_1(x) = x^2 + bx + c$ où $b, c \in \mathbb{R}$. Le polynôme p_1 possède les racines $\alpha_\pm = -b/2 \pm \sqrt{b^2/4 - c} \in \mathbb{C}$. Comme p_1 est un facteur dans la factorisation de f, ce sont des racines de f.

[1] Chaque polynôme $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ possède au moins une racine complexe.

Exercice 7. (*) Soit R un anneau.

i) Montrer que l'élément 1 est unique.

ii) Montrer qu'un élément inversible $r \in R^*$ n'est pas un diviseur de zéro.

iii) Montrer que deux polynômes

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad \text{et} \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \in R[x]$$

sont égaux si et seulement si $a_i = b_i$ pour tous i.

iv) Soit $R^{n\times n}$ l'anneau des matrices $n \times n$ sur R. Montrer que le centre de $R^{n\times n}$ est $Z(R^{n\times n}) = \{aI_n\colon a \in Z(R)\}$.

Solution.