EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 1	

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels. Il ne s'agit pas des exercices bonus que vous pourrez rendre si vous le souhaitez. Ceux-ci vous octroieront des points supplémentaires pour la note finale. Il y en aura toutes les deux semaines à compter de la semaine prochaine.

Exercice 1.
Soient A un anneau commutatif et $a \in A$. Montrez que l'application

$$f\colon A[t] \to A[t], \quad p(t) \mapsto p(t+a)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 2.
Soit R un anneau. Lesquels des sous-ensembles suivants sont-ils des sous-anneaux ?

1. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\} \subset M_n(R)$.
2. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\} \subset M_n(R)$.
3. $\{A \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\} \subset M_n(R)$.
4. $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.
5. $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$.
6. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subset M_2(\mathbb{Z})$.
7. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right\} \subset M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 3.
Soit G un groupe fini non-trivial. Montrez que $\mathbb{Z}[G]$ contient des diviseurs de zéro.

Exercice 4.
Dans chacun des cas suivants, déterminez l'ensemble des homomorphismes d'anneaux $A \to B$.

1. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$.
2. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
3. $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$.
4. $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $m, n \in \mathbb{N}$.
5. $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R}$.
6. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$.
7. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{Q}$.
8. $A = \mathbb{R}[t]$ et $B = \mathbb{R}$.
9. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}[t]$.

Indication : Pour le point 6, montrez qu'un homomorphisme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envoie les réels positifs vers les réels positifs, et déduisez que f préserve l'ordre usuel sur les réels.

Exercice 5.
Montrez qu'il existe au plus 4 homomorphismes d'anneaux $\mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Indication : si $f\colon \mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est un homomorphisme, étudiez les images possibles des éléments de S_3.
($\star$) Montrez qu'il existe exactement 4 morphismes $\mathbb{Z}[S_3] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 6.
Soit $n \geq 1$ un entier et $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que le groupe additif sous-jacent $(A, +)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Fixons un élément $a \in A$ qui génère le groupe cyclique $(A, +)$.

1. Montrez que A est un anneau commutatif.
2. Montrez que, connaissant l'élément $a^2 \in A$, il est possible de déterminer la valeur du produit $x \cdot y$ pour tous éléments $x, y \in A$.
3. Montrez que a est un élément inversible.
4. Montrez que $A \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant qu'anneaux.

Exercice 7.
Soit k un corps. Notons $M(k) \subset \{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid \forall i, j : a_{ij} \in k\}$ l'ensemble des matrices infinies à coefficients dans k qui vérifient la condition suivante : $(a_{ij}) \in M(k)$ si et seulement si le support de chaque colonne est fini, c'est-à-dire que pour tout $j_0 \in \mathbb{N}$ seulement un nombre fini de coefficients a_{ij_0} sont non-nuls.

1. Montrez que l'addition et la multiplication usuelle de matrices induit une structure d'anneau sur $M(k)$.
2. Exhibez un élément de $M(k)$ qui est inversible à gauche, mais pas à droite.

Exercice 8.
Considérons l'anneau suivant pour un corps quelconque k :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in k \right\}.$$

1. Démontrez que si $I \neq A$ est un idéal (bilatère/à gauche/à droite) de A, alors I est contenu dans un des sous-ensembles suivants de A :
$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in k \right\}$$
et
$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in k \right\}.$$
2. Montrez que A_1 et A_2 sont des idéaux bilatères. Montrez que A_1 et A_2 avec l'addition et la multiplication héritée de l'anneau A ne sont pas des anneaux.
3. Listez tous les idéaux (bilatères/à gauche/à droite) de A.
4. Calculez tous les quotients de A par ses idéaux bilatères.

Exercice 9.
Prouvez les affirmations suivantes.

1. Un anneau intègre et fini est un corps.
2. Un anneau A dans lequel $a = a^2$ pour tout $a \in A$, est commutatif.

L'exercice suivant était un exercice bonus de l'année 2021.

Exercice 10 ($\star$)**.**
Soit k un corps. Considérons l'anneau des séries formelles $k[[t]]$.

1. Montrez que $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ est un élément inversible de $k[[t]]$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.
   Indication : Construisez les inverses algorithmiquement. Le cas de $f(t) = 1 - t$ est instructif pour comprendre la preuve générale.

2. Montrer que le corps des fractions de $k[[t]]$ est donné par les séries de Laurent

$$k((t)) := \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i \mid a_i \in k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$