Chapitre 6

Systèmes linéaires

6.1 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

De nombreux problèmes d'algèbre (théoriques et pratiques) se ramènent à la résolution d'un *système d'équations linéaires.* Par exemple *déterminer tous les éléments* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tels que*

$$f(x, y, z) = (2x - y, x + z) = (1, 2).$$

Pour résoudre ce problème, on écrit cette équation vectorielle comme un système de 2 équations à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + z &= 2. \end{aligned}$$

Donnons une valeur t quelconque à x, alors on obtient $x = t$, $y = 2t - 1$ et $z = 2 - t$. L'ensemble des solutions est donc donné par

$$S = \{(t, 2t - 1, 2 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Cet ensemble représente la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $(0, -1, 2)$ et parallèle au vecteur $(1, 2, -1)$; on peut écrire

$$S = (0, -1, 2) + \mathrm{Vec}(\{(1, 2, -1)\}).$$

On dit que S est une *droite affine* dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition. Soit V un espace vectoriel sur le corps K. On dit qu'un sous-ensemble $E \subset V$ est un *sous-espace affine* si ou bien $E = \emptyset$, ou bien il existe $p \in V$ et un sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que

$$x \in E \quad \Leftrightarrow \quad (x - p) \in W.$$

De manière équivalente,

$$E = p + W = \{x = p + w \mid w \in W\}.$$

On dit alors que E est le *translaté* par p du sous-espace vectoriel W.

Définition. Si $E \subset V$ est un sous-espace affine non vide, alors on dit que le sous-espace vectoriel W dont E est un translaté est l'*espace des directions* de E, on dit aussi que c'est l'*espace directeur* de E.

La *dimension* du sous-espace affine E est par définition la dimension de son espace directeur W. Si $E = \emptyset$ on convient que $\dim(\emptyset) = -1$. Un sous-espace affine de dimension 1 de l'espace vectoriel V s'appelle une *droite affine* de V ; un sous-espace affine de dimension 2 s'appelle un *plan affine.* Un *hyperplan* est un sous-espace affine de dimension $\dim(V) - 1$ (donc de codimension 1). Un sous-espace affine de dimension 0 s'appelle un *point* de V. Il ne contient qu'un seul élément et on identifie habituellement le sous-espace affine $\{p\}$ avec l'élément $p \in V$.

Proposition 6.1.1. *Si $E \subset V$ est un sous-espace affine et $W \subset V$ son espace directeur, alors pour tout $q \in E$ on a $E = q + W$.*

Preuve. Si $E = \emptyset$ il n'y a rien à prouver. Si $E \neq \emptyset$, alors par définition de la notion d'espace affine, il existe $p \in E$ tel que $E = p + W$. Soit q un autre élément de E, alors il existe $w_0 \in W$ tel que $q = p + w_0$ et on a

$$x \in E \Leftrightarrow (x - p) \in W \Leftrightarrow (x - (q - w_0)) = ((x - q) + w_0) \in W \Leftrightarrow (x - q) \in W,$$

donc $q + W = p + W$.

□

Une conséquence importante est que si $\{w_1, w_2, \ldots, w_d\}$ est une base de W et $q \in E$, alors tout élément x de E peut s'écrire sous la forme

$$x = q + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i w_i$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in K$.

L'une des motivations pour introduire la notion de sous-espace affine est le résultat suivant :

Théorème 6.1.2. *Soit $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels sur le même corps K. Alors pour tout $b \in V_2$, l'ensemble*

$$f^{-1}(b) = \{x \in V_1 | f(x) = b\}$$

est un sous-espace affine de V_1.
Si $b \notin \operatorname{Im}(f)$, alors ce sous-espace affine est vide, et si $b \in \operatorname{Im}(f)$ alors l'espace directeur de $f^{-1}(b)$ est le noyau $\operatorname{Ker}(f)$.

Preuve. Si $b \notin \operatorname{Im}(f)$ il n'y a rien à prouver. Si $b \in \operatorname{Im}(f)$, alors par définition il existe $p \in V_1$ tel que $f(p) = b$. On a alors

$$x \in f^{-1}(b) \Leftrightarrow f(x) = f(p) \Leftrightarrow f(x - p) = 0 \Leftrightarrow (x - p) \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow x \in p + \operatorname{Ker}(f).$$

□

Conséquence. De façon explicite, ce théorème dit que si $q \in V_1$ est une solution particulière de l'équation $f(x) = b$, et si $\{w_1, w_2, \ldots, w_d\}$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$ (ce sont donc d solutions linéairement indépendantes de l'équation (dite homogène) $f(w) = 0$), alors la solution générale de l'équation $f(x) = b$ est de la forme $x = q + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i w_i$.

6.2 Systèmes d'équations linéaires

Définition 6.2.1. Un *système d'équations linéaires* à m équations et n inconnues (m et n deux entiers positifs) sur le corps K est un ensemble d'équations du type

$$(\star) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où $1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$.

- Les *coefficients du système* a_{ij} et les *termes inhomogènes* b_i sont des scalaires (des éléments du corps de base) donnés.

- Les x_j sont les inconnues que l'on cherche à déterminer.
- Le système obtenu à partir de $(\star)$ en remplaçant les b_j par 0 s'appelle le *système homogène* associé à $(\star)$.
- Une *solution* du système est un n-tuple $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ qui satisfait simultanément toutes les m équations du système.

Remarque : On peut écrire le système d'équations sous la forme d'une unique équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

D'une manière abrégée, on peut écrire $A \cdot X = B$ où X et B sont des vecteurs-colonnes et A est une matrice rectangulaire. Le vecteur X représente les inconnues du système.
On a alors le théorème suivant :

Théorème 6.2.2. *L'ensemble*

$$\mathcal{S} = \{X \in K^n \mid AX = B\}$$

des solutions du système $(\star)$ *est un sous-espace affine de* K^n*. Si* $\mathcal{S} \neq \emptyset$*, alors* $\mathcal{S} = X_0 + \mathrm{Ker}(A)$*, où* $X_0 \in K^n$ *est une solution particulière du système.*

La preuve est immédiate à partir des résultats du paragraphe précédent. $\square$

Définition. Le système $(\star)$ est dit *incompatible* si $\mathcal{S} = \emptyset$. D'une manière équivalente, le système est incompatible si et seulement si $B \notin \mathrm{Im}(A)$.

Dans la pratique, pour résoudre le système $(\star)$, on essaye d'abord de déterminer s'il est compatible ou incompatible. S'il est compatible, on cherche une solution particulière X_0, puis on cherche une base $w_1, \dots, w_r$ de $\mathrm{Ker}(A)$. Toute solution de $(\star)$ s'écrit alors de façon unique sous la forme

$$X = X_0 + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r.$$

6.3 La méthode de Gauss-Jordan

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre un système linéaire. L'une des méthodes les plus efficaces est de procéder par élimination systématique des variables. Cette méthode, que le lecteur a sans-doute déjà vue lors de ses études secondaires, semble avoir été pratiquée depuis la nuit des temps, on en trouve trace sur des tablettes cunéiformes babylonniennes (environ 2000 ans avant J.C) et un écrit chinois du premier siècle, le *Jiuzhang Suanshu*, ou les *Neuf Chapitres sur l'Art Mathématique*, en donne une description précise.
On appelle *algorithme de Gauss-Jordan* une méthode systématique pour résoudre un système linéaire par élimination.

Commençons par un exemple élémentaire, considérons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 5 \\ 4x & + & y & = & -4 \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce système, on peut soustraire de la seconde équation le double de la première (ce qui élimine x de la seconde équation), puis diviser chaque équation par son premier coefficient non nul (qu'on appelle le *pivot*) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 5 \\ & & 7y & = & -14 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & \frac{3}{2}y & = & \frac{5}{2} \\ & & y & = & -2 \end{array}\right.$$

et on obtient la solution $y = -2$, x=(3y+5)/2=-1/2.

Décrivons maintenant le cas général. Considérons le système de m équations linéaires à n inconnues sur le corps K :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

On peut écrire ce système sous forme matricielle $AX = B$. Il est commode de considérer la matrice de taille $m \times (n+1)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

On appelle cette matrice la *matrice augmentée* du système. On la note aussi $(A|b)$ et on remarque qu'elle contient toute l'information nécessaire à la résolution des équations.
L'algorithme de Gauss-Jordan consiste à ramener la matrice augmentée $(A \mid b)$ à une forme plus simple, au moyen d'une suite de transformations dites *transformations élémentaires.* Ces transformations sont les suivantes :

Type 1 : On échange deux lignes de la matrice augmentée $(A|b)$.

Type 2 : On multiplie une ligne de $(A|b)$ par un scalaire non nul $\lambda \in K^*$.

Type 3 : On ajoute à une ligne de $(A|b)$ un multiple d'une autre ligne.

Il est facile de se convaincre que ces trois types de transformations ne changent pas les solutions du système d'équations.
Par une suite de transformations élémentaires, on peut obtenir une nouvelle matrice $(A'|b')$ qui satisfait aux trois conditions suivantes :

(i) Toutes les lignes de $(A'|b')$ qui ne contiennent que des zéros, s'il en existe, se trouvent en bas de la matrice.

(ii) Le premier coefficient non nul d'une ligne s'appelle le *pivot* de cette ligne. On suppose que tout coefficient en dessous d'un pivot est nul.

(iii) Le pivot de chaque ligne non nulle est situé à droite du pivot de la lignes précédente.

Définition. Si une matrice satisfait ces trois conditions, on dit qu'elle est sous *forme échelonnée.* On dit qu'elle est sous *forme échelonnée réduite*, si elle satisfait aux deux conditions supplémentaires suivantes :

(iv) Chaque pivot est égal à 1.

(v) Tout coefficient en dessus d'un pivot est nul (donc le pivot est le seul coefficient non nul de sa colonne).

Reprenons l'exemple du système de deux équations à deux inconnues précédent. La méthode d'élimination, exprimée avec la matrice augmentée, se présente sous la forme suivante :

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -14 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & 3y & = & 5 \\ & & 7y & = & -14 \end{array}\right.$$

qui se résoud facilement en $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -2)$.

On peut aussi effectuer quelques transformations élémentaires supplémentaires et ramener la matrice augmentée à sa forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le système initial est donc équivalent au système suivant

$$\begin{cases} x & & = & -\frac{1}{2} \\ & y & = & -2, \end{cases}$$

dont la solution est immédiate.

Théorème 6.3.1. *A) Toute matrice est équivalente à une unique matrice échelonnée réduite par une suite de transformations élémentaires.*

B) Le rang d'une matrice ne change pas lors des transformations élémentaires. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non nulles ; c'est aussi le nombre de pivots.

C) Une matrice carrée est inversible si et seulement si sa matrice échelonnée réduite est la matrice identité.

La preuve de ce théorème consiste à formaliser précisément l'algorithme de Gauss-Jordan et à prouver par un argument de récurrence que cet algorithme s'arrête après un nombre fini d'étapes.

Exemple. On considère le système de 4 équations à 4 inconnues suivant

$$\begin{cases} x + 2z & = & 2 \\ 2x + y + 3z & = & -1 \\ 3y - 3z + 3t & = & -12 \\ 3x + y + 5z & = & 1 \end{cases}$$

En alignant les variables, on trouve la matrice augmentée :

$$\begin{cases} x & & & + & 2z & & & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 3z & & & = & -1 \\ & & 3y & - & 3z & + & 3t & = & -12 \\ 3x & + & y & + & 5z & & & = & 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -12 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss-Jordan se déroule comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -12 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les transformations élémentaires appliquées sont

$$(1)\ L_3 \to \tfrac{1}{3}L_3 \quad (2)\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \quad (3)\ L_4 \to L_4 - 3L_1 \quad (4)\ L_4 \to L_4 - L_2.$$

Le système initial est donc équivalent au système échelonné suivant de 3 équations à 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2z & = & 2 \\ y & - & z & = & -5 \\ & & t & = & 1 \end{array}\right.$$

La solution générale est facile à trouver. Elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z \\ z-5 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \in K)$$

Remarque. La méthode d'échelonnage nous donne une façon simple de savoir si un élément $b \in K^m$ appartient à l'image de la matrice A. C'est en effet le cas si et seulement si le système linéaire $AX = b$ est compatible, ce qui se traduit par la condition $\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A)$. Il suffit donc de vérifier que les formes échelonnées de ces deux matrices ont le même nombres de lignes non nulles (ou le même nombre de pivots).

6.4 Matrices élémentaires

Les transformations élémentaires de l'algorithme de Gauss-Jordan peuvent s'appliquer à toute matrice, en particulier à la matrice identité.

Définition. On appelle *matrice élémentaire d'ordre m et de type* I, II ou III toute matrice qui s'obtient en appliquant une transformation élémentaire de type I, II ou respectivement III sur les lignes de la matrice identité $\mathbf{I}_m$. Par exemple, les matrices

$$P_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{(4)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_{(3,1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement des matrices d'ordre 4 de type I (échanger les lignes 2 et 3 pour $P_{(2,3)}$), de type II (multiplier la dernière ligne par $\lambda \neq 0$ pour $D_{(4)}(\lambda)$) et de type III (ajouter λ fois la première ligne à la troisième ligne pour $L_{(3,1)}(\lambda)$).

D'une manière générale, on définit dans $M_m(K)$ les matrices suivantes :

- La matrice élémentaire de type I est $P_{(r,s)} = (p_{ij})$ avec $p_{ij} = \delta_{ij}$ si $i \notin \{r, s\}$ et $p_{rs} = p_{sr} = 1$ (et les autres p_{ij} sont nuls). C'est la matrice obtenue à partir de $\mathbf{I}_m$ en échangeant les lignes r et s.
- La matrice élémentaire de type II est $D_{(r)}(\lambda) = (d_{ij})$ (où $\lambda \neq 0$) avec $d_{\mathrm{ij}} = \delta_{ij}$ si $i \neq r$ et $d_{rj} = \lambda\delta_{rj}$. On peut aussi écrire

  $$D_{(r)}(\lambda) = \mathbf{I}_m + (\lambda - 1)E_{rr} = \operatorname{Diag}(1, 1, \cdots, \lambda, \ldots 1),$$

  c'est la matrice obtenue en multipliant la ligne r de l'identité par le scalaire λ.
- La matrice élémentaire de type III est $L_{(r,s)}(\lambda) = \mathbf{I}_m + \lambda E_{rs}$ est la matrice obtenue en ajoutant à la ligne r de la matrice identité λ fois la ligne s (avec $r \neq s$).

Les indices r et s ainsi que le scalaire λ s'appellent les *paramètres* de la matrice élémentaire.

On a alors les propriétés suivantes :

Théorème 6.4.1. *(A) Toute matrice élémentaire est inversible et son inverse est une matrice élémentaire de même type.*

(B) Si $A \in M_{m\times n}(K)$ est une matrice à m lignes et n colonnes, alors multiplier A à gauche par une matrice élémentaire a le même effet qu'appliquer à A la transformation de même type et de mêmes paramètres à la matrice A.

(C) Pour toute matrice $A \in M_{m\times n}(K)$, il existe une matrice inversible $Q \in M_m(K)$ telle que

i.) Q est le produit d'un nombre fini de matrices élémentaires.

ii.) $A' = Q \cdot A$ est de forme échelonnée réduite.

Preuve. (A) On vérifie facilement que

$$(P_{(r,s)})^{-1} = P_{(r,s)}, \quad (D_{(r)}(\lambda))^{-1} = D_{(r)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad (L_{(r,s)}(\lambda))^{-1} = L_{(r,s)}(-\lambda)$$

(B) Se voit en examinant chaque cas.

(C) Il s'agit d'une reformulation de l'algorithme de Gauss-Jordan.

□

Le point de vue matriciel sur l'algorithme de Gauss-Jordan nous dit que pour résoudre $AX = B$, on se ramène au système équivalent $(QA)X = QB$ où Q est un produit de matrices élémentaires et QA est échelonnée. Les deux systèmes $AX = B$ et $A'X = B'$ où $A' = QA$ et $B' = QB$ ont les mêmes solutions car Q est inversible.

6.5 Systèmes matriciels et inversion d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan

On a vu que la méthode de Gauss-Jordan permet de résoudre une équation matricielle AX $= B$ où X et B sont des matrices-colonnes. La méthode s'applique aussi lorsque A et B sont des matrices plus générales.

Exemple. Supposons que l'on désire résoudre le système suivant dont l'inconnue et le second membre sont des matrices de type 3×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 14 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice augmentée du système est la 3×5 matrice

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 10 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 14 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

La méthode de Gauss-Jordan nous permet de trouver la forme échelonnée réduite de cette matrice, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|rr} 1 & 0 & 0 & 74 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 25 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -57 & 21 \end{array}\right).$$

Le système admet donc pour unique solution

$$X = \begin{pmatrix} 74 & -20 \\ 25 & -9 \\ -57 & 21 \end{pmatrix}.$$

Supposons maintenant que la matrice $A \in M_n(K)$ est une matrice carrée inversible, alors sa forme échelonnée réduite est la matrice identité $\mathbf{I}_n$. Par conséquent, si on considère le système linéaire

$$AX = \mathbf{I}_n,$$

avec $X \in M_n(K)$, alors l'algorithme de Gauss-Jordan revient à multiplier par une matrice Q, qui est produit de matrices élémentaires, pour obtenir le système équivalent

$$QAX = Q\mathbf{I}_n.$$

Mais puisque $QA = \mathbf{I}_n$, on a $Q = A^{-1}$. On a donc le résultat suivant :

Proposition 6.5.1. *Si A est une $n \times n$ matrice inversible, alors l'algorithme de Gauss-Jordan appliqué à la matrice augmentée $(A|\mathbf{I}_n)$ produit une matrice $(\mathbf{I}_n|Q)$ où $Q = A^{-1}$.*

Exemple 1. Pour inverser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on peut appliquer la méthode d'échelonnage à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. Pour inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on échelonne la matrice augmentée $(A|\mathbf{I}_3)$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Les étapes sont : (1) on soustrait la première ligne de la troisième, (2) on soustrait le triple de la troisième ligne de la première, (3) on ajoute le double de la première ligne à la seconde).

On en conclut que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 8 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$