Rappel : ingrédients de base des algorithmes

Données

- Entrées
- Sorties
- Variables internes

Instructions

- Affectations
- Structures de contrôle
  - Branchements conditionnels (tests)
  - Itérations (boucles)
  - Boucles conditionnelles

Sous-algorithmes

Rappel: complexité temporelle et notation $\Theta(\cdot)$

Définition 1

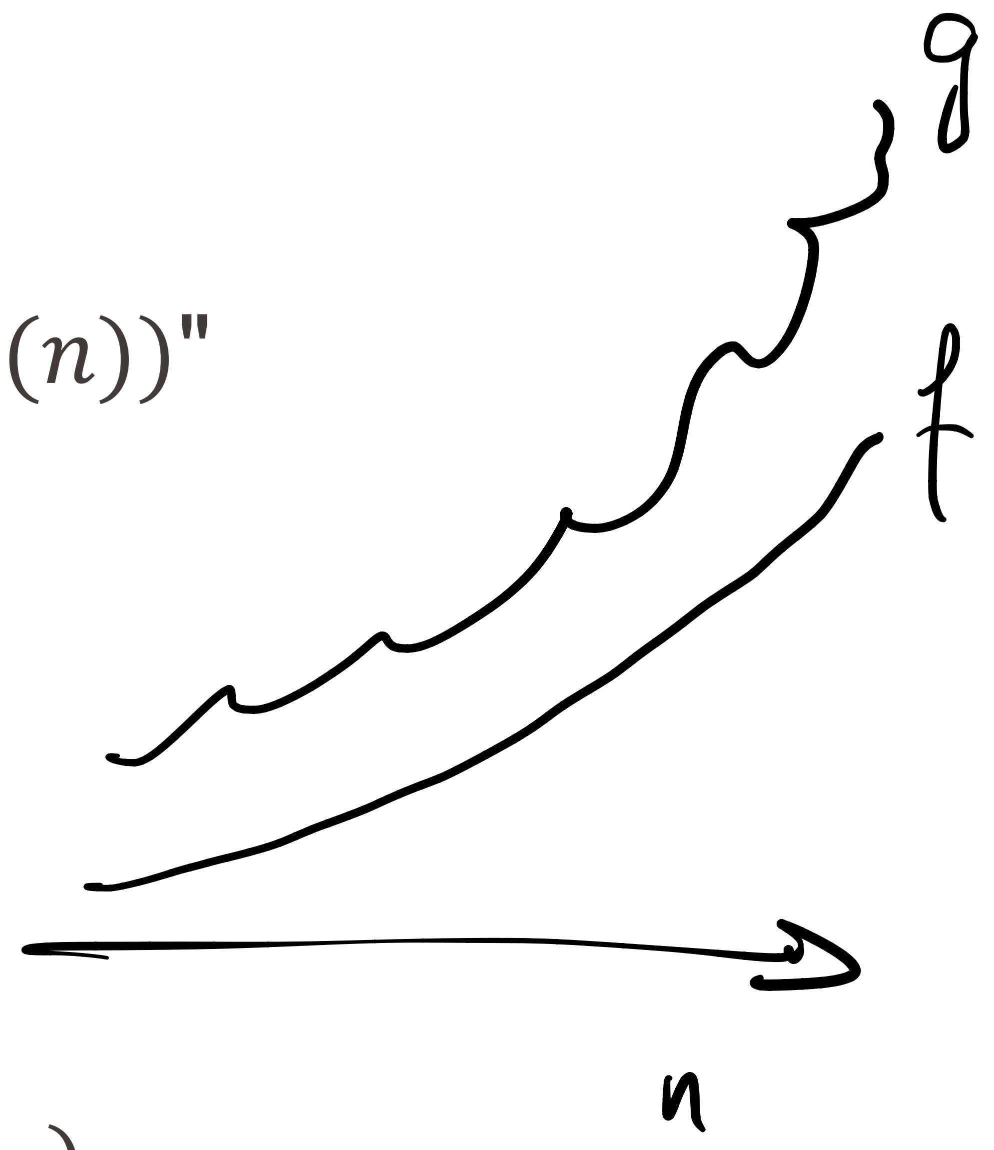
instructions lues

La complexité temporelle d'un algorithme est le nombre ~~**d'opérations élémentaires** effectuées~~ au cours de son exécution, dans le **pire des cas**.

Définition 2

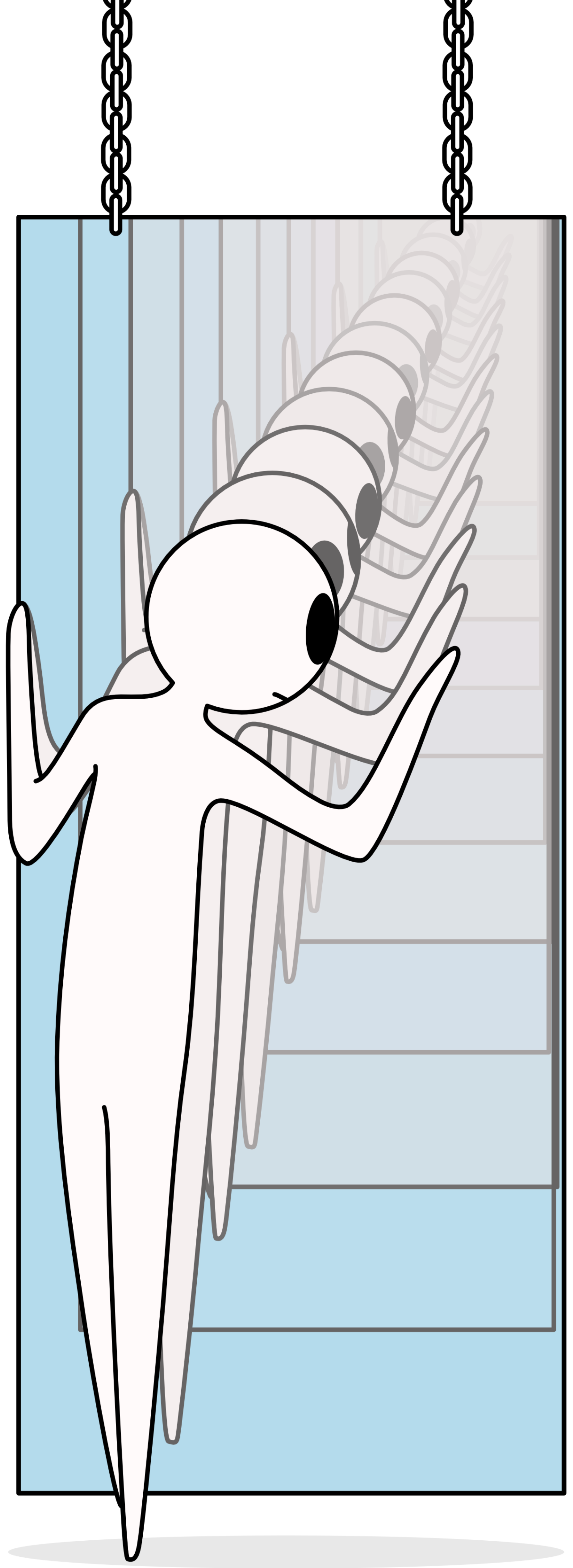
Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions non-négatives
On dit que "$f(n)$ est un **grand theta** de $g(n)$" et on écrit "$f(n) = \Theta(g(n))$"
s'il existe $0 < C_1 < C_2 < \infty$ et $N \geq 1$ tels que

$$C_1\, g(n) \leq f(n) \leq C_2\, g(n) \quad \text{pour tout } n \geq N$$



Deux exemples :

- Les fonctions $f(n) = n + 2$ et $f(n) = 3n + 3$ sont toutes deux des $\Theta(n)$
- La fonction $f(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ est un $\Theta(n^2)$



Information, Calcul et Communication

Récursivité : introduction

Olivier Lévêque

École polytechnique fédérale de Lausanne

EPFL

Définition

Un algorithme récursif est un algorithme qui résout un problème en calculant des solutions d'instances plus petites du même problème (l'algorithme s'invoquant lui-même de façon répétitive).

Exemple: recherche de clé

image: Freepik.com

Information, Calcul et Communication

Algorithme

recherche de clé (dans un carton donné)

est-ce que je vois la clé quelque part dans le carton?
- si oui, c'est bon: sortir de l'algorithme
- si non, est-ce que le carton contient au moins un autre carton ?
  - si oui, parcourir la liste des autres cartons et effectuer une **recherche de clé** dans chacun d'entre eux
  - si non, sortir de l'algorithme

Deux remarques

- cet algorithme se termine toujours (mais pas forcément avec succès, si la clé n'est pas dans le carton donné)
- remplacer "carton" par "camionnette" pour lancer l'algorithme au départ

La récursivité: trois principes

1. Un algorithme récursif a toujours une **condition de terminaison** (correspondant à l'instance la plus simple du problème à résoudre).

2. Pour résoudre un problème donné, un algorithme récursif fait d'abord appel à lui-même avec des données de taille plus petite en entrée (résolvant ainsi une **instance plus simple** du problème).

3. Un **processus de reconstruction** est généralement nécessaire ensuite pour obtenir la solution du problème d'origine.

Illustration

Calcul de la somme des n premiers nombres entiers

Exemple: lorsque $n = 3$, $s(3) = 1 + 2 + 3 = 6$

somme (version itérative)
entrée : nombre entier positif n sortie : $\mathrm{s(n)}$ = somme des n premiers nombres entiers
$\mathrm{s} \leftarrow 0$ Pour i allant de 1 à n : $s \leftarrow s + i$ Sortir : s

Complexité temporelle: $\Theta(n)$ (une boucle)

Version récursive

instance plus simple du problème

- Résolution incrémentale : $s(n) = n + s(n-1)$

recombinaison

- Condition de terminaison : $n = 1$ (sortie correspondante : $s(1) = 1$)

EPFL

Version récursive

somme récursive

entrée : nombre entier positif n
sortie : $s(\mathrm{n})$ = somme des n premiers nombres entiers

condition de terminaison

Si $n = 1$:
    Sortir : 1
Sortir : n + **somme récursive**$(n-1)$

recombinaison

instance plus simple

Version récursive

somme récursive
entrée : nombre entier positif n sortie : $s(\mathrm{n})$ = somme des n premiers nombres entiers
Si $n = 1$:   Sortir : 1 Sortir : $n +$ **somme récursive**$(n-1)$

Complexité temporelle: également $\Theta(n)$ (comme nous allons le voir)

Schéma d'exécution pour $n = 3$

somme rec (3)

n=1? non

Sortir 3 + somme rec (2)

n=1? non

Sortir 2 + somme rec (1)

n=1? oui → sortir 1

3

6

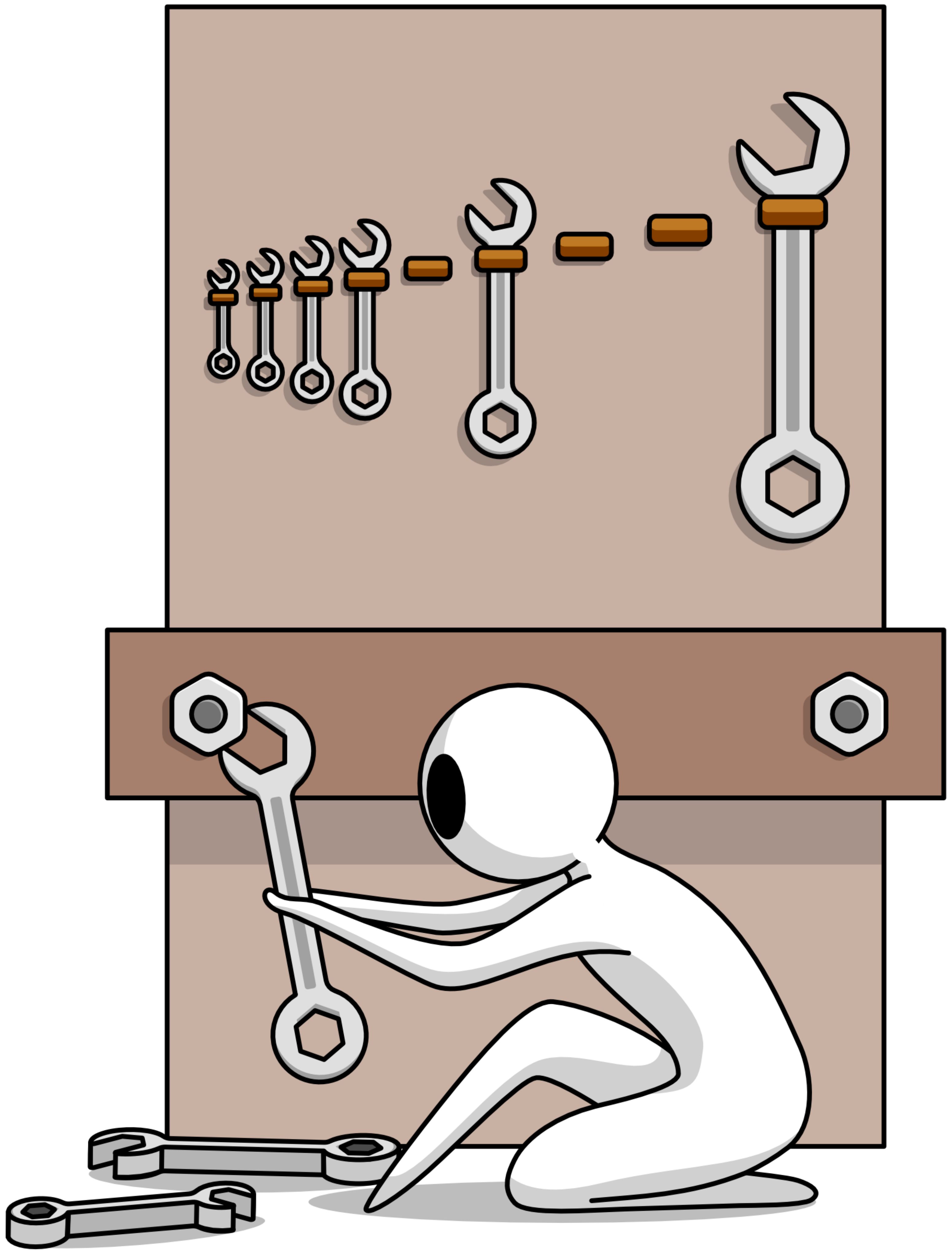
nb opérations

$= \Theta(n)$

somme récursive

entrée : nombre entier positif n
sortie : $s(\mathrm{n})$ = somme des n premiers nombres entiers

Si $n = 1$:
    Sortir : 1
Sortir : n + **somme récursive**$(n-1)$



Information, Calcul et Communication

Recherche par dichotomie

Olivier Lévêque

École
polytechnique
fédérale
de Lausanne

Recherche d'un élément dans une liste

Problème

Identifier si un élément fait partie d'une liste donnée est une composante essentielle de nombreux algorithmes. On distingue deux cas principaux :

1. **Recherche dans une liste non-ordonnée**
   - Est-ce qu'un ingrédient donné (ex: gluten) fait partie ou non de la liste des ingrédients d'un produit ?
   - Est-ce que la feuille de papier sur laquelle j'avais écrit ce numéro de téléphone se trouve dans cette pile de feuilles que j'ai devant moi ?

Dans ce cas, pour identifier si l'élément qu'on recherche fait partie de la liste ou non, on n'a pas d'autre choix que de parcourir toute la liste.

Recherche d'un élément dans une liste (bis)

2. Recherche dans une liste ordonnée

- Identification d'un numéro de carte de crédit
- Recherche d'un nom dans un annuaire (ordre lexicographique)

Dans ce cas, on peut bien sûr effectuer la même recherche linéaire que précédemment, mais on peut aussi faire beaucoup mieux grâce à la récursivité. C'est l'algorithme de **recherche par dichotomie**.

$x \leq L(4)$

$L = (-17, -14, -12, -3, +10, +100, +225, +1'001)$

$x > L(4)$

$n = 8$

$x = 30$

$m = \frac{n}{2} = 4$

Recherche dichotomique

dichotomie
entrée : liste ordonée L de nombres entiers, de taille n, objet x sortie : est-ce que $x \in L$? (oui/non)
Si $n = 1$, alors : si $x = L(1)$, alors : Sortir oui sinon : Sortir non $m \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ Si $\underline{x \leq L(m)}$, alors : Sortir **dichotomie**$(L(1{:}m), m, x)$ Sinon : Sortir **dichotomie**$(L(m+1{:}n), n-m, x)$

condition de terminaison

$L(1:m) = (L(1), L(2) \ldots L(m))$

$L(m+1:n) = (L(m+1), L(m+2) \ldots L(n))$

$\lfloor x \rfloor$ = partie entière de x

$\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$

Schéma d'exécution de l'algorithme

$L(2)$

Avec $L = (1,7,9,14)$, $n = 4$ et $x = 10$:

dicho (L, 4, 10)

n=1 ? non

m ← 2

10<7 ? non →

$L(3:4) = (9,14)$

dicho ((9,14), 2, 10)

n=1 ? non

m ← 1

10<9 ? non →

dicho ((14), 1, 10)

n=1 ? oui → 10 = 14 ? non → Sortir non

dichotomie
entrée : liste ordonée L de nombres entiers, de taille n, objet x sortie : est-ce que $x \in L$? (oui/non)
Si $n = 1$, alors : si $x = L(1)$, alors : Sortir oui sinon : Sortir non $m \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ Si $x \le L(m)$, alors : Sortir **dichotomie**$(L(1{:}m), m, x)$ Sinon : Sortir **dichotomie**$(L(m+1{:}n), n-m, x)$

en général :

$$\boxed{\frac{n}{2^k} \simeq 1 \longrightarrow k \sim \log_2 n}$$

ici :

$$\boxed{n = 2^k \longleftrightarrow k = \log_2(n)}$$

Information, Calcul et Communication

$L = (\quad)$ $\qquad n = 1'000$

$m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 500 \qquad L(\quad) \qquad n' = 500$

$L(\quad) \qquad n'' = 250$

$L(\quad) \qquad n''' = 125$

$$\frac{n}{2^k} \sim 1 \ ? \qquad k \sim \underline{\underline{\log_2(n)}}$$

$\longrightarrow$ comp. temporelle $= \Theta(\log_2 n)$

Complexité temporelle de l'algorithme

- A chaque étape, la taille de la liste est divisée (approx.) par 2.

- Partant d'une liste de taille n, le nombre d'étapes nécessaires pour arriver à une liste de taille 1 est donc (approx.) $\log_2(n)$.

- → complexité temporelle $\Theta(\log_2(n))$:
  bien plus efficace que l'algorithme de recherche linéaire vu avant !

$n = 1'000 \longrightarrow \log_2 n \sim 10$

$n = 1'000'000 \longrightarrow \log_2 n \sim 20$

$n = 1'000'000'000 \longrightarrow \log_2 n \sim 30$

Information, Calcul et Communication

Tri par fusion

Olivier Lévêque

École
polytechnique
fédérale
de Lausanne

Tri d'une liste de nombres

Ce problème, omniprésent en informatique, à été résolu de milles façons !

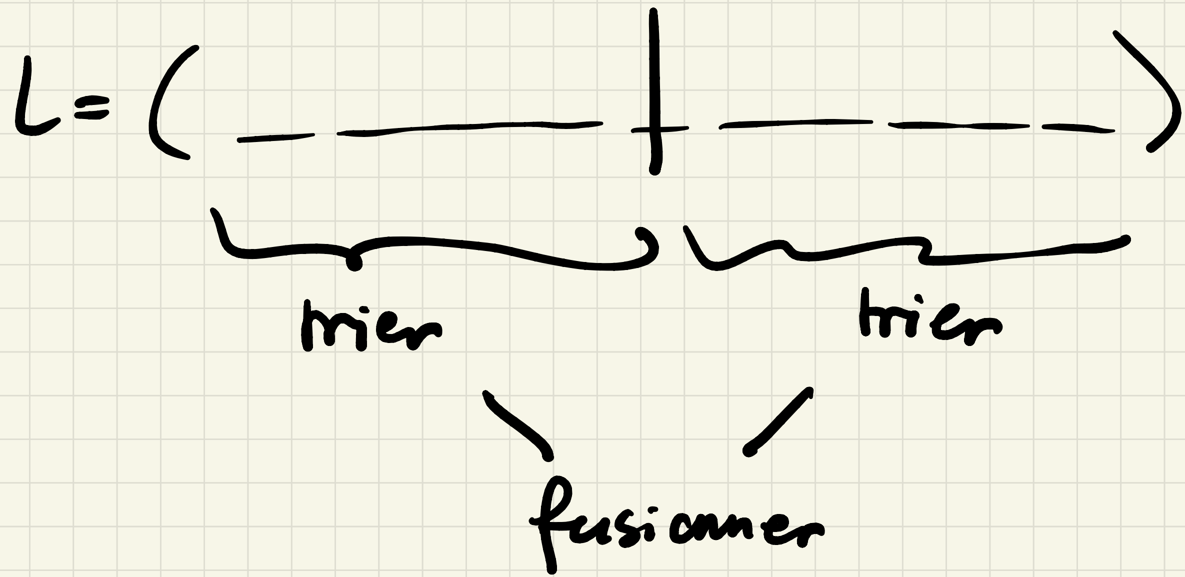
La semaine dernière, nous avons vu le **tri par insertion**, mais il existe aussi :

$\Theta(n^2)$

- Le tri à bulles
- Le tri à cocktail
- Le tri à peigne
- Le tri pair-impair
- Le tri par sélection
- Le tri par tas
- Le tri rapide
- Le tri stupide (!)
- …

Aujourd'hui, nous allons voir un tri récursif : le **tri par fusion**, qui permet une résolution plus rapide du problème que le tri par insertion.

Idée du tri par fusion:



Tri par fusion

Soit L une liste non-triée de nombres entiers, de taille n.
On aimerait trier cette liste dans l'ordre croissant.

tri par fusion

entrée : Liste L non-triée de nombres entiers, de taille n
sortie : Liste L' triée

cond. de term.

Si $n = 1$, sortir : L
$m \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$
$L_1 \leftarrow$ **tri par fusion**$(L(1{:}m), m)$
$L_2 \leftarrow$ **tri par fusion**$(L(m+1{:}n), n-m)$
$L' \leftarrow$ **fusion**(L_1, L_2)
Sortir : L'

instances plus simples du problème

recombinaison

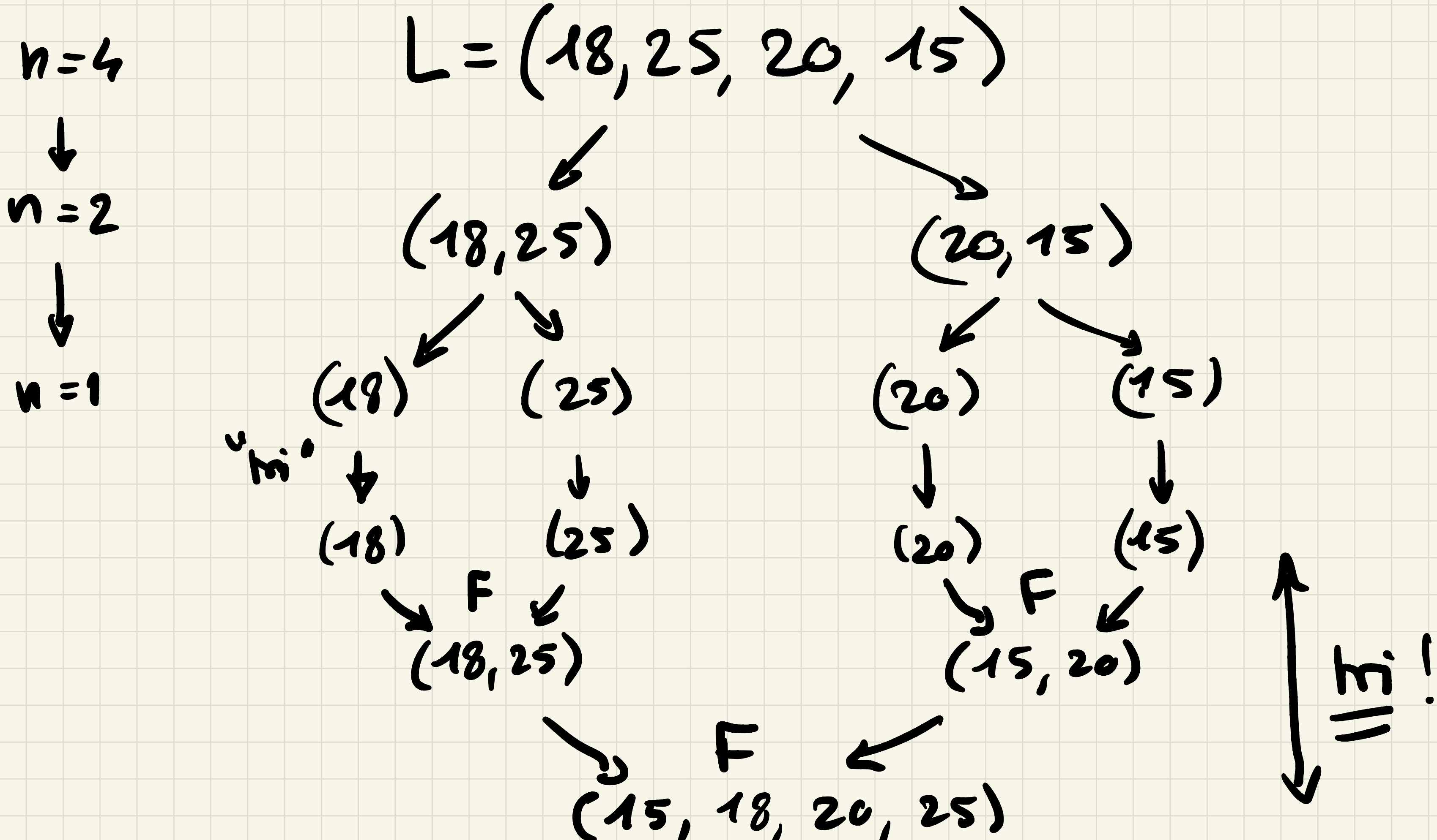
Schéma d'exécution de l'algorithme

Avec $L = (9,3,5,4)$ et $n = 4$:

tri par fusion

entrée : Liste L non-triée de nombres entiers, de taille n
sortie : Liste L' triée

Si $n = 1$, sortir : L
$m \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$
$L_1 \leftarrow$ **tri par fusion**$(L(1{:}m), m)$
$L_2 \leftarrow$ **tri par fusion**$(L(m+1{:}n), n-m)$
$L' \leftarrow$ **fusion**(L_1, L_2)
Sortir : L'



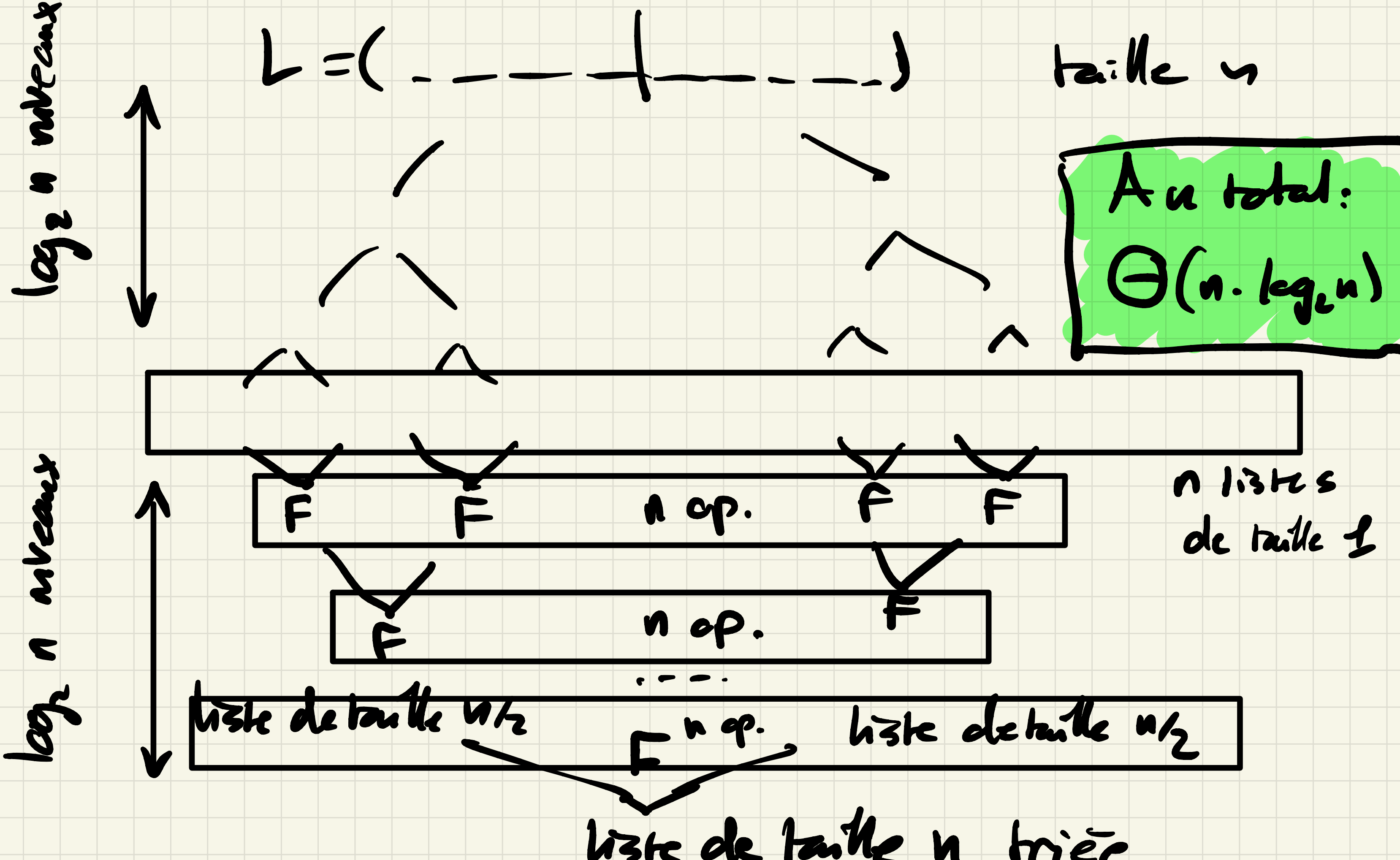
n=4
n=2
n=1
L = (18, 25, 20, 15)
(18, 25)
(20, 15)
(18)
(25)
(20)
(15)
"m"
(18)
(25)
(20)
(15)
F
F
(18, 25)
(15, 20)
F
(15, 18, 20, 25)
m!

Complexité temporelle de l'algorithme

- Comme pour la recherche par dichotomie, (approx.) $\log_2(n)$ niveaux sont nécessaires pour arriver à des listes de taille 1.

- A chaque, niveau, il faut fusionner n éléments, ce que se fait en $\Theta(n)$ opérations (comme nous allons le voir).

- → complexité temporelle $\Theta(n \cdot \log_2(\mathrm{n}))$:
  plus efficace que le tri par insertion (dans le pire des cas)



$L = (\ldots \mid \ldots)$
taille n
Au total : $\Theta(n \cdot \log_2 n)$
$\log_2 n$ niveaux
F
F
n op.
F
F
n listes de taille 1
F
n op.
F
liste de taille $n/2$
F
n op.
liste de taille $n/2$
$\log_2 n$ niveaux
liste de taille n triée

Algorithme fusion ("fermeture éclair")

Fusion

entrée : Listes ordonnées L_1, L_2 (de tailles m_1 et m_2 resp.)
sortie : Liste L (de taille $m_1 + m_2$, également ordonnée)

$j_1 \leftarrow 1$
$j_2 \leftarrow 1$
$j \leftarrow 1$
Tant que $j_1 \leq m_1$ et $j_2 \leq m_2$:
    Si $L_1(j_1) \leq L_2(j_2)$:
        $L(j) \leftarrow L_1(j_1)$
        $j_1 \leftarrow j_1 + 1$
        $j \leftarrow j + 1$
    Sinon :
        $L(j) \leftarrow L_2(j_2)$
        $j_2 \leftarrow j_2 + 1$
        $j \leftarrow j + 1$

Si $j_1 = m_1 + 1$:
    Tant que $j_2 \leq m_2$:
        $L(j) \leftarrow L_2(j_2)$
        $j_2 \leftarrow j_2 + 1$
        $j \leftarrow j + 1$
Sinon :
    Tant que $j_1 \leq m_1$:
        $L(j) \leftarrow L_1(j_1)$
        $j_1 \leftarrow j_1 + 1$
        $j \leftarrow j + 1$
Sortir : L

$m_1 = 4$
j_1
$L_1 = (1, 3, 18, 45)$

$L_2 = (5, 6, 22, 30)$
j_2 $m_2 = 4$

$L = (1, 3, 5, 6, \ldots)$
j

Algorithme fusion ("fermeture éclair")

Fusion

entrée : Listes ordonnées L_1, L_2 (de tailles m_1 et m_2 resp.)
sortie : Liste L (de taille $m_1 + m_2$, également ordonnée)

$j_1 \leftarrow 1$
$j_2 \leftarrow 1$
$j \ \leftarrow 1$
Tant que $j_1 \leq m_1$ et $j_2 \leq m_2$:
    Si $L_1(j_1) \leq L_2(j_2)$:
        $L(j) \leftarrow L_1(j_1)$
        $j_1 \leftarrow j_1 + 1$
        $j \leftarrow j + 1$
    Sinon :
        $L(j) \leftarrow L_2(j_2)$
        $j_2 \leftarrow j_2 + 1$
        $j \leftarrow j + 1$

Si $j_1 = m_1 + 1$:
    Tant que $j_2 \leq m_2$:
        $L(j) \leftarrow L_2(j_2)$
        $j_2 \leftarrow j_2 + 1$
        $j \leftarrow j + 1$
Sinon :
    Tant que $j_1 \leq m_1$:
        $L(j) \leftarrow L_1(j_1)$
        $j_1 \leftarrow j_1 + 1$
        $j \leftarrow j + 1$
Sortir : L

Complexité temporelle $\Theta(m_1 + m_2)$