EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 4	

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels.
L'exercice bonus de cette semaine peut être rendu sur Moodle jusqu'au mardi 26 mars, à 18h.

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'idéal proposé est premier ou maximal.

(a) $(0) \subset \mathbb{Z}$.

(b) $(t) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(c) $(t) \subset \mathbb{R}[t]$.

(d) $(101) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(e) $(42) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(f) $(t^2 - 2) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(g) $(t^2 - 2) \subset \mathbb{R}[t]$.

(h) $(t + 5, 10) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(i) $(t + 5, 11) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(j) $(t^2 + 1, 2) \subset \mathbb{Z}[t]$.

Indication : Pour prouver qu'un idéal bilatère $I \subset A$ est premier, il suffit de montrer que le quotient A/I est intègre.

Exercice 2. 1. Discuter les systèmes suivants : $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 7 \pmod{12} \end{cases}$ et $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 8 \pmod{12} \end{cases}$

2. Montrer que $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 3. 1. Soit $f\colon A \twoheadrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux surjectif tel que $\ker f = (a_1, \dots, a_m)$ pour certains $a_1 \dots, a_m \in A$. Soit aussi $I = (b_1, \dots, b_n) \subseteq B$ un idéal à gauche. Si $c_1, \dots, c_n \in A$ sont tels que $f(c_i) = b_i$ pour chaque i, montrez que $f^{-1}(I) = (a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_n)$.

2. Soit k un corps, $a, b \in k$ et considérons les homomorphismes d'anneaux k-linéaires

$$\mathrm{ev}_b\colon k[x,y] \to k[x],\ x \mapsto x,\ y \mapsto b \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ev}_a\colon k[x] \to k,\ x \mapsto a$$

et

$$\xi := \mathrm{ev}_a \circ \mathrm{ev}_b\colon k[x,y] \longrightarrow k.$$

Montrez que $\ker \xi = (x - a, y - b)$ et que $\ker \xi$ est un idéal maximal de $k[x,y]$.
On peut en fait montrer que si k est algébriquement clos, alors tous les idéaux maximaux de $k[x,y]$ sont de cette forme. C'est une conséquence du Nullstellensatz d'Hilbert.

Exercice 4.
Dans cet exercice, nous étudions les anneaux $\mathbb{Z}[i]/(p)$ pour p un nombre premier. Nous écrirons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^2 + 1)$.
Indication : Combinez l'exemple 2.4.19 et le quotient en deux temps.

2. Pour $p = 5$, montrez que $\mathbb{Z}[i]/(5) \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$.
Indication : Le théorème des restes chinois peut être utile.

3. Plus généralement montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.
*Indication: Montrez que l'hypothèse est équivalente à l'existence de deux racines disctintes de -1 dans $\mathbb{F}_p$. Pour une direction, on utilisera que $\mathbb{F}_p^\times$ est un groupe cyclique.**

*Voici une preuve de ce fait. Si ce groupe n'était pas cyclique, par la classification des groupes abéliens de type fini, il existerait $n < p - 1$ tel que $x^n = 1$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p^\times$. Mais alors $t^n - 1$ aurait $p - 1$ racines dans $\mathbb{F}_p$ ce qui est absurde.

Exercice 5.
Soient A et B deux anneaux commutatifs. Quels sont les idéaux de $A \times B$? Quels sont les idéaux premiers de $A \times B$?

Exercice 6.
Soit A un anneau commutatif.

1. Montrez que si $\mathfrak{m}$ est maximal et est composé uniquement d'éléments nilpotents, alors c'est l'unique idéal maximal de A. La réciproque est-elle vraie ?

2. Montrez que $A \setminus A^\times$ est un idéal si et seulement si A a un unique idéal maximal.

Exercice 7 ($\star$).
Soit R un anneau commutatif. Déterminer $(R[t])^\times$.
On pourra se ramener au cas intègre en quotientant par des idéaux premiers de R.

Exercice Bonus.
Soit k un corps. On note $A = k[t^2 - t, t^3 - t] \subset k[t]$.

1. Montrez que pour tout $n \geq 2$ on a $t^n - t^{n-1} \in A$. Déduisez que A est le sous-anneau de $k[t]$ formé des polynômes tels que $f(0) = f(1)$.

   Indications: $t^{n+1} - t^n = t^n - t^{n-1} + t^{n-1}(t-1)^2$. Pour la deuxième partie, procédez par induction. Si f est de degré n avec coefficient dominant a, remarquez que $f - a(t^n - t^{n-1})$ est de degré inférieur.

2. Montrez que l'idéal généré par $t^2 - t$ et $t^3 - t$ est maximal dans A. On note celui-ci $\mathfrak{m}$.

3. Quels sont les premiers $\mathfrak{p}$ de $k[t]$ tel que $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}$?

4. Montrez que $t^2 - t \mid (t^3 - t)^2$ dans A. Déduisez que l'anneau quotient $A/(t^2 - t)$ a un unique idéal maximal non-nul formé d'éléments nilpotents. Concluez également que $(t^2 - t)$ n'est pas un idéal premier.

5. On considère le passage au quotient suivant de l'inclusion
$$\varphi\colon A/(t^2 - t) \to k[t]/(t^2 - t).$$
   Explcitez tous les idempotents de l'anneau de droite. On note un e un tel idempotent. Calculez la préimage des idéaux $\varphi^{-1}((e))$ pour chaque idempotent de l'anneau de droite.