EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 5	

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels.

Exercice 1. (a) Soit k un corps. Trouver tous les idéaux de l'anneau quotient $k[t]\big/(t^2)$. Déterminer lesquels sont premiers et lesquels sont maximaux.

(b) Soit $I \subset M \subset A$ deux idéaux d'un anneau A et soit $\pi : A \to A\big/I$ l'homomorphisme quotient. Montrer que l'idéal $\pi(M)$ est maximal dans $A\big/I$ si et seulement si M est maximal dans A.

Exercice 2 (Fonctions polynomiales.)**.**
Soit A un anneau commutatif et $\mathcal{F}(A)$ l'anneau des fonctions $\varphi\colon A \to A$ où la somme et le produit sont définis dans l'ensemble d'arrivée (par exemple $(\varphi \cdot \phi)(a) = \varphi(a) \cdot \phi(a)$). On considère l'évaluation comme application $\mathrm{ev}\colon A[t] \to \mathcal{F}(A)$. L'évaluation d'un polynôme f est donc la fonction polynomiale $\mathrm{ev}(f)$ définie par $\mathrm{ev}(f)(a) = \mathrm{ev}_a(f) = f(a)$.

(a) Montrer que l'évaluation est un homomorphisme d'anneaux.

(b) Montrer que si A est fini, alors l'évaluation n'est pas injective.

(c) Montrer que si A est intègre et infini, alors l'évaluation est injective.

Exercice 3.
Soit A un anneau commutatif. On note $\mathrm{nil}(A)$ pour les éléments nilpotents de A. Soit k un corps.

1. Déterminer $\mathrm{nil}(A)$, où $A = k[x,y]\big/(x^2y^3)$.
2. Écrire $\mathrm{nil}(A)$ comme l'intersection d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$, $\mathrm{nil}(A) = \cap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i$, pour m minimal.
3. Déterminer les premiers minimaux de A.

Exercice 4. (a) Montrer que $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^p - 1)$.

(b) Montrez que $\mathrm{car}(\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]) = p$. En particulier on a $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$

(c) Montrer que $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ n'est pas isomorphe à un produit de 2 anneaux non-nuls.

Exercice 5.
L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

1. Montrer que la norme $N\colon \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$ définie par $N(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2$ est une fonction multiplicative (donc que $N(xy) = N(x)N(y)$ – noter que si l'on définit $\overline{a + b\sqrt{5}} = a - b\sqrt{5}$, alors $N(x) = x\overline{x}$) et que $a + b\sqrt{5}$ est inversible si et seulement si $N(a + b\sqrt{5}) = \pm 1$.
2. Montrer que $9 + 4\sqrt{5}$ est inversible et en déduire que $(\mathbb{Z}[\sqrt{5}])^\times$ est infini.
3. Montrer qu'il n'existe aucun élément de norme 2 ou -2, si bien que tout élément de norme 4 est irréductible.
4. Trouver deux décompositions de 4 en produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
5. L'idéal $(3 + \sqrt{5})$ est-il premier?

Exercice 6.
Soit $d > 1$. On note $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$. On note $N(a + bi\sqrt{d}) = a^2 + db^2$.

1. Lister les éléments $x \in A$ tel que $N(x) \leq d + 1$.
2. Montrer que $i\sqrt{d}$, $1 + i\sqrt{d}$ et $1 - i\sqrt{d}$ sont irréductibles.
3. Si $d + 1$ n'est pas premier *dans* $\mathbb{Z}$, alors A n'est pas factoriel.
4. Si $q = d + 1$ est premier *dans* $\mathbb{Z}$ alors celui-ci admet une factorisation unique en irréductibles dans A.

Exercice 7 ($\star$).
Soit $A = F[G]$, où F est un corps et G est un groupe.

(a) Montrer que $\sum_{g\in G} a_g g \in Z(A)$ si et seulement si $g \to a_g$ est constant sur les classes de conjugaison de G.

(b) Fixons $A = \mathbb{C}[S_3]$ et ε une racine primitive cubique de l'unité. Soient

$$e_1 = \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3} g, \quad e_2 = \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3} \mathrm{sgn}(g)g \quad \text{et } e_3 = f_1 + f_2 \in A,$$

où $f_1 = \frac{\mathrm{Id} + \varepsilon(123) + \varepsilon^2(132)}{3}$ et $f_2 = \frac{\mathrm{Id} + \varepsilon^2(123) + \varepsilon(132)}{3}$.
Montrer que $A \cong Ae_1 \times Ae_2 \times Ae_3$.

(c) Montrer que $Ae_1 \cong \mathbb{C}$ et $Ae_2 \cong \mathbb{C}$.

(d) Montrer que $Ae_3 \cong M_2(\mathbb{C})$.