

Les exercices indiqués par une étoile \star sont optionnels.

Exercice 1. 1. Soit A un anneau Euclidien. Prouvez que l'algorithme d'Euclide peut être adapté pour calculer les pgdc dans A .

2. Effectuez la division avec reste de $27 - 23i$ par $8 + i$ dans $\mathbb{Z}[i]$, et montrez que ces deux entiers de Gauss sont premiers entre eux.
3. Calculez un pgdc de $11 + 3i$ et de $1 + 8i$ dans $\mathbb{Z}[i]$. Ce pgdc est-il unique ?
4. Écrivez les idéaux $(11 + 3i)$ et de $(1 + 8i)$ comme un produit d'idéaux premiers de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 2.

Notons $\mathcal{C} := C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0, 1]$ (muni des opérations d'addition et de multiplication de fonctions).

1. Pour $x \in [0, 1]$, écrivons $I_x := \{f \in \mathcal{C} \mid f(x) = 0\}$. Montrez que I_x est un idéal maximal.
2. Pour $x \neq y$, montrez que $I_x \cap I_y$ n'est pas un idéal premier.
3. Soit $I \subset \mathcal{C}$ un idéal. Supposons que I n'est contenu dans aucun des I_x . Montrez que $I = \mathcal{C}$.
Indication : la propriété de Heine-Borel sera utile.
4. Montrez que tout idéal maximal de \mathcal{C} est égal à I_x pour un certain $x \in [0, 1]$.

Exercice 3.

Considérons les polynômes $f = x^3 - 2x^2 + x - 2$ et $g = x^4 - 2x^3 + 7x - 14$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

1. Montrez que le pgdc de f et de g dans $\mathbb{Z}[x]$ vaut $x - 2$ en écrivant $f = (x - 2)f_0$ et $g = (x - 2)g_0$ dans $\mathbb{Z}[x]$.
2. Pour un premier p , notons \bar{f} et \bar{g} la réduction de f et g dans $\mathbb{F}_p[x]$. Calculez le pgdc de \bar{f} et de \bar{g} pour chaque p .
Indication : Remarquez que les étapes de l'algorithme d'Euclide définissables dans $\mathbb{Z}[x]$ sont des étapes de l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{F}_p[x]$ après réduction modulo p .

Exercice 4. 1. Soit $d > 0$ un entier positif. Montrez que $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ est un corps de fractions de $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$.

2. Montrez que $x^3 - 2i$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}[i])[x]$.

Indication : Utilisez le lemme de Gauss, et gardez en tête qu'un élément de $\mathbb{Q}[i]$ peut s'écrire comme $\frac{a+bi}{n}$ avec $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.

Soit k un corps.

1. Montrez que le sous-anneau $k[t^2, t^3] \subset k[t]$ n'est pas factoriel.
2. De même, montrez que $k[t^2, t^5]$ et $k[t^3, t^7]$ ne sont pas factoriels.
3. Montrez que $k[x, y]/(x^2 - y^3)$ n'est pas factoriel.

Indication : Montrez que cet anneau est isomorphe à l'un des anneaux considérés précédemment.

Exercice 6.

Considérons l'anneau de matrices

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} n & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

ainsi que le sous-ensemble

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \right\} \subset A.$$

1. Montrez que I est un idéal bilatère, que $A/I \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ et que A/I est Noethérien.
2. Montrez que I est un idéal à droite minimal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'idéal à droite J tel que $0 \subsetneq J \subsetneq I$).
3. Montrez que A est Noethérien à droite.

Indication : Etant donnée une chaîne croissante d'idéaux, considérez son image par l'application quotient $A \rightarrow A/I$.

Exercice 7 (*)

Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ pour un $d \geq 1$. Pour un $a + bi\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ on pose la norme $N(a + bi\sqrt{d}) = a^2 + db^2$

1. Soit $x \in A$ non-nul. Montrer que

$$|A/(x)| = N(x).$$

(C'est à dire que la cardinalité du quotient est égale à la norme de x .)

Remarquer que A est un groupe abélien libre de rang 2 et que le quotient $A/(x)$ est égal au quotient de A par l'image de l'application linéaire $\cdot x : A \rightarrow A$, et utiliser la forme normale de Smith pour conclure.

Dans les points 2. et 3., on considère (B, σ) un anneau euclidien quelconque qui n'est pas un corps.

2. Montrer que si $b \in B$ est non-nul tel que $\sigma(b) = 0$, alors b est inversible.
3. Montrer qu'il existe un $b \in B$ non-nul et non inversible tel que

$$|B/(b)| \leq |B^\times| + 1.$$

4. Montrer que si $d > 3$, alors A n'est pas Euclidien. (Il ne s'agit pas de montrer que N n'est pas une fonction Euclidienne pour A , mais qu'il n'en existe aucune.)