EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 8	

Si vous le souhaitez, vous pouvez rendre votre solution de l'exercice bonus sur la page Moodle du cours avant le mardi 30 avril, 18h.

Exercice 1. (a) Soit A un anneau intègre. Si $a_1, \ldots, a_n \in A$ sont des racines distinctes de $f(x) \in A[x]$, montrer que $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$ divise $f(x)$.

(b) Soient p et q deux nombres premiers distincts dans $\mathbb{Z}$. Montrer que le polynôme $t^2 - t$ de $(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z})[t]$ possède quatre racines distinctes $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, mais que $(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - a_4)$ ne divise pas $t^2 - t$.

(c) Soient $f, g \in \mathbb{Z}[t]$ des polynômes primitifs. Montrer que si f divise g dans $\mathbb{Q}[t]$, alors f divise g dans $\mathbb{Z}[t]$.

(d) Décomposer les polynômes $t^4 + 1$ et $t^8 - 1$ en facteurs irréductibles dans les anneaux $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{Z}[t]$, $\mathbb{F}_2[t]$ et $\mathbb{F}_{11}[t]$.

Exercice 2 (Polynômes irréductibles I). (a) Montrer que $\frac{2}{9}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^3 + \frac{1}{3}$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Montrer que $x^4 + [2]_5$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_5[x]$ et conclure que $x^4 + 15x^3 + 7$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Montrer que $x^2 + y^2 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[x, y]$.

(d) Montrer que $x^2 + y^2 + [1]_2$ n'est pas un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_2[x, y]$.

(e) Montrer que $y^4 + x^3 + x^2y^2 + xy + 2x^2 - x + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x, y]$.

(f) Montrer que $4x^3 + 120x^2 + 8x - 12$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$.

(g) Montrer que $t^6 + t^3 + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[t]$.

(h) Montrer que $y^4 + xy^3 + xy^2 + x^2y + 3x^2 - 2x$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x, y]$.

Exercice 3 (Polynômes irréductibles II).
Soit $f(t) = t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 7t - 4$ dans $\mathbb{Z}[t]$.

(a) Montrer que $\pi_2(f)$, la réduction modulo 2, n'est pas irréductible.

(b) Montrer que $\pi_3(f)$, la réduction modulo 3, n'est pas irréductible.

(c) Utiliser les décompositions des parties précédentes pour conclure néanmoins que f est irréductible.

Exercice Bonus. Soit k un corps.

1. Montrez que $k[t^2, t^3]$ est égal au sous-anneau suivant A de $k[t]$.

$$A = \{f \in k[t] \mid \frac{\partial f}{\partial t}(0) = 0\}$$

2. Identifiez le noyau du morphisme surjectif de k-algèbre

$$k[x, y] \mapsto k[t^2, t^3]$$

   qui envoie $x \mapsto t^2$ et $y \mapsto t^3$. Celui-ci est generé par un polynôme qu'on note $g \in k[x, y]$.

3. On considère $k\left[x, \frac{y}{x}\right]$ comme sous-anneau de $\mathrm{Frac}(k[x, y])$. Montrez que le morphisme de k-algèbres $k[s, t] \mapsto k\left[x, \frac{y}{x}\right]$ qui envoie $s \mapsto x$ et $t \mapsto \frac{y}{x}$ est un isomorphisme.

4. Décomposez l'image de $g \in k[x, y]$ par l'inclusion $k[x, y] \to k\left[x, \frac{y}{x}\right]$ en produit d'irréductibles de $k\left[x, \frac{y}{x}\right]$.

5. Montrez qu'il existe un unique morphisme $k\left[x, \frac{y}{x}\right] \to k[t]$ qui fait commuter le diagame suivant (les flèches verticales sont les inclusions évidentes)

$$\begin{tikzcd} k[x, y] \arrow[r, "x \mapsto t^2, y \mapsto t^3"] \arrow[d] & k[t^2, t^3] \arrow[d] \\ k\left[x, \frac{y}{x}\right] \arrow[r, dashed] & k[t] \end{tikzcd}$$

   Quel est son noyau ? Est-il égal à l'idéal generé par l'image de g dans $k\left[x, \frac{y}{x}\right]$?

Remarque. Ces calculs peuvent apparaître aléatoires mais ils ont en fait un joli sens géometrique. Cet exercice bonus s'interpète géometriquement comme l'étude de la résolution de la singularité du *point de rebroussement* par un procédé qu'on appelle *éclatement*, voir figure ci-dessous. En réalité, toute la théorie des anneaux et des corps est *duale* à de la géometrie et tout ce que vous voyez dans ce cours peut s'interpéter géometriquement. C'est ce qu'on appelle la *géometrie algébrique*.