EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Corrigé – bonus 2	

Exercice bonus. Soit k un corps. On note $A = k[t^2 - t, t^3 - t] \subset k[t]$.

1. Montrez que pour tout $n \geq 2$ on a $t^n - t^{n-1} \in A$. Déduisez que A est le sous-anneau de $k[t]$ formé des polynômes tels que $f(0) = f(1)$.

   Indications: $t^{n+1} - t^n = t^n - t^{n-1} + t^{n-1}(t-1)^2$. *Pour la deuxième partie, procédez par induction. Si f est de degré n avec coefficient dominant a, remarquez que $f - a(t^n - t^{n-1})$ est de degré inférieur.*

2. Montrez que l'idéal généré par $t^2 - t$ et $t^3 - t$ est maximal dans A. On note celui-ci $\mathfrak{m}$.

3. Quels sont les premiers $\mathfrak{p}$ de $k[t]$ tel que $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}$?

4. Montrez que $t^2 - t \mid (t^3 - t)^2$ dans A. Déduisez que l'anneau quotient $A/(t^2 - t)$ a un unique idéal maximal non-nul formé d'éléments nilpotents. Concluez également que $(t^2 - t)$ n'est pas un idéal premier.

5. On considère le passage au quotient suivant de l'inclusion

$$\varphi \colon A/(t^2 - t) \to k[t]/(t^2 - t).$$

   Explicitez tous les idempotents de l'anneau de droite. On note un e un tel idempotent. Calculez la préimage des idéaux $\varphi^{-1}((e))$ pour chaque idempotent de l'anneau de droite.

Solution.

1. On montre par récurrence sur $n \geq 2$ que $t^n - t^{n-1} \in A$. Pour $n = 2$, il n'y a rien à faire, et pour $n = 3$, notons $t^3 - t^2 = t^3 - t - (t^2 - t)$. Supposons le résultat vrai pour $n \geq 3$ et montrons le pour $n + 1$. Notons que

$$t^{n+1} - t^n = t^n - t^{n-1} + t^{n-1}(t-1)^2 = t^n - t^{n-1} + (t^{n-1} - t^{n-2})(t^2 - t)$$

   et donc le résultat suit.

   Pour montrer la deuxième partie, on procède par récurrence sur le degré. Si f est de degré ≤ 2, qu'on note $f(t) = at^2 + bt + c$, si $f(0) = f(1)$ on obtient

$$a + b + c = c \Rightarrow a + b = 0$$

   Dès lors, on déduit que $f(t) \in k[t^2 - t]$. Supposons qu'on a montré que si f est degré $n \geq 2$ et que $f(0) = f(1)$, alors $f \in k[t^2 - t, t^3 - t]$. Soit f de degré $n + 1$ qui satisfait $f(0) = f(1)$ de coefficient dominant a. Notons que $g = f - a(t^n - t^{n-1})$ satisfait $g(0) = g(1)$ et est de degré $\leq n$. Par suite, $g \in k[t^2 - t, t^3 - t]$ par récurrence. Mais comme $f = g + a(t^n - t^{n-1})$, on conclut.

   Barème. 10 points pour chaque partie.

2. On considère la surjection de k-algèbres $k[x, y] \to k[t^2 - t, t^3 - t]$ qui envoie $x \mapsto t^2 - t$ et $y \mapsto t^3 - t$. L'image de l'idéal maximal (x, y) est $(t^2 - t, t^3 - t)$, d'où l'assertion.

   Barème. 20 points.

3. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $k[t]$ tel que $t^2 - t \in \mathfrak{p}$, soit t ou $t - 1$ appartient à $\mathfrak{p}$. Dans le premier cas $(t) \subset \mathfrak{p}$ et donc $(t) = \mathfrak{p}$ par maximalité, et dans le deuxième cas on déduit similairement que $(t - 1) = \mathfrak{p}$. Montrons que $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}$ pour $\mathfrak{p} = (t)$ ou $(t - 1)$. Dans les deux cas, on a $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p} \cap A$, et on obtient encore l'assertion par maximalité.

   Barème. 20 points.

4. Comme
$$(t^3-t)^2 = t^2(t-1)^2(t+1)^2 = (t^2-t)\underbrace{\left[t(t-1)(t+1)^2\right]}_{=f}$$
et que le terme embrassé satisfait $f(0) = f(1)$, on conclut. Dès lors dans A/t^2-t, l'image de l'idéal maximal est un idéal nilpotent. On procède comme dans l'exercice 6.1 de la série 4 pour montrer que ce quotient a donc un unique idéal maximal. Comme ce quotient contient l'image de t^3-t qui est non-nulle et nilpotente, ce quotient n'est pas intègre ce qui montre l'assertion restante au sujet de la primalité.

Barème. 10 points pour la division, 10 points pour le reste.

5. Notons que
$$k[t]/(t^2-t) \cong k[t]/t \times k[t]/(t-1)$$
par le théorème des restes chinois. Dès lors comme $k \times k$ possède 4 idempotents, on voit que les idempotents de l'anneau sont $0, 1, t, 1-t$. Grâce au point 3, on voit que la pré-image de (t) et de $(1-t)$ est l'unique idéal maximal dans $A/(t^2-t)$. La pré-image de l'idéal (1) est encore l'idéal (1). Notons que $t^3-t = (t^2-t)(t+1)$ donc cet élément est nul dans $k[t]/(t^2-t)$. Ainsi $\mathfrak{m}$ est inclus dans le noyau de ce morphisme. Par maximalité on conclut que le noyau de ce morphisme est $\mathfrak{m}$.

Barème. 10 points pour calculer les idempotents, 10 pour identifier les préimages.