EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Corrigé – bonus 4	

Exercice Bonus. Soit k un corps.

1. Montrez que $k[t^2, t^3]$ est égal au sous-anneau suivant A de $k[t]$.
$$A = \{f \in k[t] \mid \frac{\partial f}{\partial t}(0) = 0\}$$
2. Identifiez le noyau du morphisme surjectif de k-algèbre
$$k[x, y] \mapsto k[t^2, t^3]$$
qui envoie $x \mapsto t^2$ et $y \mapsto t^3$. Celui-ci est généré par un polynôme qu'on note $g \in k[x, y]$.
3. On considère $k\left[x, \frac{y}{x}\right]$ comme sous-anneau de $\mathrm{Frac}(k[x, y])$. Montrez que le morphisme de k-algèbres $k[s, t] \mapsto k\left[x, \frac{y}{x}\right]$ qui envoie $s \mapsto x$ et $t \mapsto \frac{y}{x}$ est un isomorphisme.
4. Décomposez l'image de $g \in k[x, y]$ par l'inclusion $k[x, y] \to k\left[x, \frac{y}{x}\right]$ en produit d'irréductibles de $k\left[x, \frac{y}{x}\right]$.
5. Montrez qu'il existe un unique morphisme $k\left[x, \frac{y}{x}\right] \to k[t]$ qui fait commuter le diagame suivant (les flèches verticales sont les inclusions évidentes)
$$\begin{tikzcd} k[x,y] \arrow[r, "x\mapsto t^2, y\mapsto t^3"] \arrow[d] & k[t^2,t^3] \arrow[d] \\ k\left[x, \frac{y}{x}\right] \arrow[r, dashed] & k[t] \end{tikzcd}$$
Quel est son noyau ? Est-il égal à l'idéal généré par l'image de g dans $k\left[x, \frac{y}{x}\right]$?

Solution.

1. Soit $f(t) \in k[t]$, avec coefficient $a \in k$ en degré 1. On a
$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = a.$$
Dès lors, l'anneau A est constitué des polynômes avec coefficient égal à zéro en degré 1. Comme tout nombre entier plus grand que 2 s'écrit $2i + 3j$ pour des $i, j \geq 0$, on voit que $A = k[t^2, t^3]$.

   Barème. 20 points.

2. Notons que $x^3 - y^2$ est dans le noyau de ce morphisme. On montre que le noyau est l'idéal engendré par ce polynôme. Soit $f(x, y)$ dans le noyau. En ajoutant un élément $g(x, y)$ de $(x^3 - y^2)$ on peut supposer que $f(x, y) + g(x, y)$ est de la forme
$$\sum_i a_i x^i y + \sum_j b_j x^j.$$
En regardant désormais l'image de cet élément par le morphisme, on voit
$$\sum_i a_i t^{2i+3} = -\sum_j b_j t^{2j}.$$
Ainsi, on déduit en inspectant la parité des degrés que $a_i = b_j = 0$ pour tout i, j, ce qui conclut.

   Barème. 20 points.

3. Le morphisme en question est surjectif comme il atteint les générateurs. Pour montrer l'injectivité, prenons $f(x,y) \in k[x,y]$ tel que

$$0 = f(x, \frac{y}{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{y^j}{x^{j-i}}.$$

Pour montrer que $f = 0$, il faut montrer que tous les a_{ij} sont nuls. En prenant N plus grand que le degré maximal en y de f en multipliant l'égalité ci-dessus on obtient un égalité dans $k[x,y]$

$$0 = x^N f(x, \frac{y}{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} y^j x^{N+i-j}.$$

Comme pour j fixé, si $N+i-j = N+i'-j$ on a $i = i'$ on voit que tous les termes ci-dessus sont facteurs de monômes distincts. Dès lors, on conclut que $a_{ij} = 0$ pour tout i, j.

Barème. 20 points.

4. Notons que

$$x^3 - y^2 = x^3 - x^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 = x^2 \left(x - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right).$$

Avec l'identification du point précédent, on voit que x et $x - \left(\frac{y}{x}\right)^2$ sont irréductibles, leur image étant s et $s - t^2$. Ainsi, les égalités ci-dessus décrivent une décomposition en irréductibles.

Barème. 20 points.

5. Pour faire commuter le diagramme, il faut que $x \mapsto t^2$ et $y \mapsto t^3$. Ainsi il faut que l'image de $\frac{y}{x}$ soit t. En utilisant l'isomorphisme avec $k[s,t]$ et la propriété universelle des k-algèbre de polynômes on voit que $x \mapsto t^2$ et $\frac{y}{x} \mapsto t$ s'étend en un unique morphisme de k-algèbres.

Le noyau de ce morphisme, est $x - \left(\frac{y}{x}\right)^2$. En effet en factorisant ce morphisme par $k[\frac{y}{x}, x] \to k[t,x] \to k[t]$ où le premier morphisme est l'isomorphisme de $k[x]$-algèbres envoyant $\frac{y}{x} \mapsto t$, on peut voir ce morphisme comme une évaluation en l'élément t^2.

Dès lors le noyau n'est pas égal à l'idéal généré par l'image g. En effet tous les éléments de cet idéal sont divisibles par x^2, ce qui n'est pas le cas de $x - \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

Barème. 20 points.