Exercice bonus. L'objectif de cet exercice est de trouver toutes les paires $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ telles que $x^2 + 2 = y^3$. Nous allons procéder ainsi.

Fixons $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 + 2 = y^3$.

1. Montrer que 2 ne divise pas x.
2. Montrer que $\text{pgdc}(x + i\sqrt{2}, x - i\sqrt{2}) = 1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
3. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $x + i\sqrt{2} = \pm z^3$.
4. Trouver toutes les solutions de l'équation $x^2 + 2 = y^3$ à valeur dans $\mathbb{Z}$.

Solution.

1. Si 2 divise x, alors 2 divise y^3, et donc 2 divise y. Posons $x = 2x_0$ et $y = 2y_0$. On a alors que

   $$4x_0^2 + 2 = 8y_0^3,$$

   ce qui est impossible (4 divise $4x_0^2$ et $8y_0^3$, mais pas 2).

   Barème. 10 points

2. Supposons que ce n'est pas le cas, et soit $d \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ un élément irréductible tel que d divise à la fois $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$. L'élément d divise alors

   $$(x + i\sqrt{2}) - (x - i\sqrt{2}) = 2i\sqrt{2} = -(i\sqrt{2})^3.$$

   Montrons que $i\sqrt{2}$ est irréductible, et soient donc $a, b \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tels que $ab = i\sqrt{2}$. On a alors que $N(a)N(b) = N(i\sqrt{2}) = 2$, qui est un nombre premier. Ainsi, $N(a)$ ou $N(b)$ doit valoir 1, i.e. a ou b est inversible. Ainsi, $i\sqrt{2}$ est bel et bien irréductible.

   Comme d divise $(i\sqrt{2})^3$ et que $i\sqrt{2}$ est irréductible, on a nécéssairement que $d = i\sqrt{2}$. En effet, vu que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est Euclidien par l'exercice 4, on sait par le cours que cet anneau est factoriel, et donc que la décomposition en facteurs irréductibles est unique.

   On a donc prouvé que d est associé à $i\sqrt{2}$, et par hypothèse celui-ci divise $x + i\sqrt{2}$. Ainsi, $i\sqrt{2}$ divise x, et donc $2 = N(i\sqrt{2})$ divise $N(x) = x^2$ (dans $\mathbb{Z}$). Comme 2 est premier dans $\mathbb{Z}$, on en déduit que 2 divise x, ce qui contredit le premier point.

   Barème. 40 points: 10 pour dire que d divise $(i\sqrt{2})^3$, 20 pour dire qu'en fait $d \sim i\sqrt{2}$ (dont 10 points pour dire explicitement que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est factoriel), et 10 points pour conclure.

3. Posons $a := x + i\sqrt{2}$ et $b = x - i\sqrt{2}$. On a par hypothèse que $ab = y^3$. Soit p un diviseur premier de y. Comme a et b sont premiers entre eux, p ne peut pas diviser a et b à la fois. Comme y^3 est un produit d'éléments premiers élevés au cube, on en déduit que c'est aussi le cas de a et b par l'unicité de la décomposition en facteurs premiers. En particulier, a est un cube à unité près.

   Or, les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont ± 1. En effet, ces éléments sont certainement inversibles, et dans l'autre sens si $u \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]^\times$, alors $N(u) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$, ce qui force $u = \pm 1$.

   Ainsi, $a = \pm z^3$ pour un certain $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

   Barème. 25 points: 15 points pour l'argument à coup de décomposition en facteurs premiers, et 10 points pour conclure avec les calcul des unités.

N.B.: Si l'élève a dejà remarqué au point précédent que la décomposition en facteurs irréductibles était unique parce que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est factoriel, alors il n'a pas besoin de le réécrire ici. Dans la même idée, si celui-ci s'est déjà fait sanctionné au point d'avant, alors pas besoin de le resanctionner ici. Cependant, s'il a fait une autre technique au point d'avant (n'utilisant pas que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ était factoriel) et qu'à ce point utilise l'unicité de la décomposition en facteurs premiers sans le mentionner explicitement, alors il faut enlever 10 points.

4. Remarquons que 1 et -1 sont aussi des cubes, et du coup il existe $w \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $x + i\sqrt{2} = w^3$. Ecrivons $w = e + fi\sqrt{2}$. Alors on a

$$x + i\sqrt{2} = (e + fi\sqrt{2})^3 = (e^3 - 6ef^2) + (3e^2 f - 2f^3)i\sqrt{2},$$

et donc

$$\begin{cases} x = e^3 - 6ef^2; \\ 1 = 3e^2 f - 2f^3. \end{cases}$$

La deuxième équation montre que f divise 1, i.e. $f = \pm 1$. Ainsi, on a

$$1 = \pm(3e^2 - 2).$$

Si $f = -1$, on en déduirait que $3e^2 = -1$, ce qui est impossible car 3 ne divise par -1. Ainsi, $f = 1$ et donc

$$3e^2 = 3,$$

i.e. $e = \pm 1$.

On a donc

$$x = e^3 - 6ef^2 = \pm 5.$$

Cela implique que $y^3 = 27$, et donc $y = 2$. Ainsi, les solutions de l'équation $x^2 + 2 = y^3$ dans $\mathbb{Z}^2$ sont

$$\{(5, 3), (-5, 3)\}.$$

Barème. 25 points