EPFL - Printemps 2024	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Corrigé – bonus 4	

Exercice Bonus.

1. Soit $F = \mathbb{F}_p(x, y^p)$. Calculons les degrés des extensions $K \subseteq F$ et $F \subseteq L$. Nous calculerons uniquement le degré de $K \subseteq F$, car l'autre calcul est identique.

   Montrons que le polynôme $f(t) = t^p - x^p \in K[t] = \mathbb{F}_p(x^p, y^p)[t]$ est irréductible. Si on pouvait écrire $f(t) = g(t)h(t)$ avec $g, h \in K[t]$, alors on a aussi l'égalité

   $$t^p - x^p = f(t) = g(t)h(t)$$

   dans $\mathbb{F}_p(x, y)$!

   Or, on peut écrire $t^p - x^p = (t - x)^p$ dans $\mathbb{F}_p(x, y)[t]$ (on ne pouvait pas le faire dans $K[t]$, vu que $x \notin K$). Cela implique qu'à unité près, on a $g(t) = (t - x)^a$ et $h(t) = (t - x)^b$ avec $a + b = p$. Le coefficient constant de $(t - x)^a$ est x^a, et vu que $g(t) \in K[t]$, cela force $x^a \in K$. Le seul cas ou c'est possible est que $a = 0$ ou $a = p$, i.e. $g(t) = f(t)$ ou est constant (à unité près). On a donc montré que $f(t)$ était irréductible de degré p, et donc

   $$[F : K] = p.$$

   Le même calcul montre que $[L : F] = p$, et donc

   $$[L : K] = [L : F][F : K] = p^2.$$

   Barème : 25 pts

2. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, et soit $\alpha \in L$. Notons que $\alpha^p \in K$. En effet, c'est le cas pour x et y, et vu que ces deux éléments génèrent L/K et que la puissance p est un morphisme d'anneaux (on est en caractéristique p), c'est aussi le cas de tout $\alpha \in L$.

   On a donc
   $$\alpha^p = \sigma(\alpha^p) = \sigma(\alpha)^p,$$
   ou la première égalité vient que $\alpha^p \in K$ et $\sigma|_K = id_K$.

   On a donc
   $$(\sigma(\alpha) - \alpha)^p = \sigma(\alpha)^p - \alpha^p = 0,$$
   donc on a forcément que $\sigma(\alpha) = \alpha$. On a donc montré que $\sigma = id$, et donc

   $$\mathrm{Gal}(L/K) = \{id\}.$$

   Barème : 20 pts

3. Supposons que L/K soit générée par un élément, disons β. Vu que $\beta^p \in K$ (cf plus haut), on déduit que β satisfait l'équation algébrique $t^p - \beta^p \in K[t]$. Soit m le polynôme minimal de β sur K. Alors automatiquement m divise $t^p - \beta^p$, et on a donc

   $$p^2 = [L : K] = [K(\beta) : K] = \deg(m) \leq \deg(t^p - \beta^p) = p,$$

   ce qui est une contradiction.

   Barème : 20 pts

4. Pour tout $\gamma \in K$, considérons l'extension intermédiaire

$$F_\gamma := K(x + \gamma y) \subseteq L.$$

Montrons que pour $\gamma \neq \gamma'$, on a $F_\gamma \neq F_{\gamma'}$. Cela conclura la preuve, car K est infini.

Soient $\gamma \neq \gamma' \in K$, et supposons par l'absurde que $F_\gamma = F_{\gamma'}$. Notons F ce corps. Alors par construction, on a que

$$\begin{cases} x + \gamma y \in F \\ x + \gamma' y \in F. \end{cases}$$

On peut alors sousraire et obtenir que

$$(\gamma - \gamma')y \in F.$$

Comme $\gamma \neq \gamma'$ et que K est un corps, on peut diviser et déduire que

$$y \in F.$$

Or si $x + \gamma y \in F$ et $y \in F$, on a donc que $x \in F$. Vu que $x, y \in F$, on déduit alors que $F = L$. Or, F est généré par un éléments, ce qui contredit le point précédent.

Barème : 35 pts